Euler, d'Alembert et la controverse sur les logarithmes

CHRISTIAN GILAIN*

I. Des rapports complexes

On sait combien les rapports entre Euler et d'Alembert ont été complexes[1]. Si les raisons des conflits entre les deux savants semblent essentiellement liées à leur rivalité scientifique, la question se pose du rôle éventuel joué en outre par leurs divergences idéologiques. En effet, on sait que d'Alembert s'est engagé, avec Diderot, dans la direction de l'*Encyclopédie* dont il a rédigé le discours préliminaire publié dans le tome I, en 1751, cette entreprise constituant le cœur du mouvement européen des Lumières. Dans un engagement idéologique très différent, Euler a publié en 1747 sa *Défense de la Révélation divine contre les objections des esprits forts*[2]; thème qu'il a repris dans certaines de ses *Lettres à une princesse d'Allemagne*, publiées en 1768-1772[3]. On connaît par ailleurs ses mauvais rapports avec Frédéric II, monarque éclairé avec lequel d'Alembert en entretenait d'excellents[4].

On a cependant peu d'éléments pour documenter le rôle exact de cette divergence idéologique sur les rapports entre les deux savants. Certes, dans ses articles de l'*Encyclopédie*, écrits dans les années 1750, on constate que d'Alembert évite de faire figurer ceux d'Euler dans les ouvrages de mathématiques qu'il donne en référence. Mais, on peut penser qu'il s'agit là de l'effet de leurs conflits scientifico-personnels de cette période. On relève cependant une allusion intéressante d'Euler dans une lettre à Maupertuis, en février 1757, lorsque, excédé par les revendications de priorité de d'Alembert, il lâche:

> Il avoit prétendu aussi que j'insérasse de nouvelles déclarations sur quantité d'articles que je lui avois volé. Mais ma patience est poussée à bout, et je

---

* Université Pierre et Marie Curie – Paris 6.

[1] Voir l'introduction à leur correspondance par JUSHKEVICH et TATON, 1980.

[2] EULER, *Opera*, series III, vol. 12, p. 267 *sgg*.; traduction française, 1755.

[3] EULER, *Opera*, series III, vol. 11-12.

[4] Voir l'introduction de Winter à leur correspondance in COSTABEL-WINTER, 1986.

> lui ai fait répondre que je n'en ferois rien, et qu'il puisse publier lui-même ses prétentions par tout où il veut, et que je ne m'y opposerois point. Il aura de quoi remplir l'article de *prétention* dans l'*Encyclopédie*[5].

Simple allusion, mais symptomatique du peu de sympathie d'Euler envers cette entreprise des Lumières codirigée par d'Alembert.

II. Les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires

Nous allons considérer un exemple de controverse scientifique entre les deux savants: celle de l'extension des logarithmes aux nombres négatifs et imaginaires. C'est un thème historiographique classique dont les éléments semblent bien établis: Leonhard Euler y apparaît comme le héros de cette histoire dont d'Alembert, qui s'est jusqu'au bout opposé à la théorie d'Euler, ne sort pas grandi. On peut citer, par exemple, l'article d'Elie Cartan dans l'*Encyclopédie des sciences mathématiques*:

> En réalité une telle théorie [des logarithmes des nombres imaginaires] présentait de nombreuses difficultés et il ne fallut pas moins que toute la puissance de divination de L. Euler pour la fonder sur des bases rigoureuses. […] L. Euler a ensuite exposé la théorie complète et définitive des logarithmes, telle qu'elle est universellement adoptée aujourd'hui. […] en 1761 d'Alembert soutenait encore l'opinion de Johann Bernoulli[6].

Pour construire l'histoire du sujet, les historiens ont largement utilisé le mémoire d'Euler *De la controverse entre MM. Leibniz et Bernoulli sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires*, paru en 1751 dans l'Histoire de l'Académie de Berlin pour 1749. Dans ce texte, le mathématicien Euler présente sa théorie des logarithmes et se fait en même temps historien. Ce mémoire a ainsi joué un rôle essentiel à la fois dans l'histoire et dans l'historiographie des mathématiques, pour fixer la place de chacun. Cependant, en revisitant certains éléments de la controverse d'alors, il est possible d'entrevoir que la situation est sans doute plus complexe que ce qui apparaît généralement dans l'historiographie[7].

---

[5] EULER, *Opera*, series IVA, vol. 6, p. 228.

[6] CARTAN, 1908, pp. 334-335.

[7] On trouvera des précisions sur le sujet dans le volume I/4a des *Œuvres complètes de d'Alembert* où est publié le texte inédit, D'ALEMBERT 1752.

A. La théorie d'Euler

Rappelons d'abord quelques éléments chronologiques. C'est dans sa lettre à G. Cramer du 24 septembre 1746 qu'Euler indique pour la première fois:

> J'ai trouvé dernièrement la solution d'un doute aussi important que me paroissoit celui des points de rebroussement. Il rouloit sur les logarithmes, et je dois avouer qu'il m'a tourmenté longtemps. [...] De tous ces doutes j'ai découvert dernièrement la véritable solution: de la même manière qu'à un sinus répond une infinité d'arcs différens, j'ai trouvé qu'il en est de même des logarithmes et que chaque nombre a une infinité de logarithmes différens, dont tous sont imaginaires, si le nombre proposé n'est pas réel et affirmatif[8].

Ainsi, lorsqu'il reçoit, en décembre 1746, le texte de d'Alembert *Recherches sur le calcul intégral*, destiné aux Mémoires de l'Académie de Berlin, Euler, tout en appréciant son contenu d'ensemble, réagit négativement à un passage où le savant français affirme que log(-x) est réel et que log(-x) = log x. C'est ce qui ressort de la lettre d'Euler datée du 29 décembre 1746, où il critique l'argument de d'Alembert et lui fait part des formules auxquelles il est lui-même parvenu, en particulier

$$\log(-a) = \log a + \pi(1 \pm 2n)\sqrt{-1}\,(a > 0),$$

où n est un entier quelconque[9].

Dans sa réponse du 27 janvier 1747, d'Alembert, tout en demandant à Euler, par précaution, de retirer le passage en question de son mémoire, présente de nouveaux arguments en faveur de sa thèse. Au cours de cet échange épistolaire, Euler va pouvoir annoncer à d'Alembert (lettre du 19 août 1747) qu'il a communiqué à l'Académie de Berlin un mémoire sur le sujet des logarithmes et que, pour lui, il n'y a plus de difficulté dans cette matière. Il s'agit du mémoire intitulé Sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires (E807), lu en séance le 7 septembre 1747, mais qui ne sera cependant pas publié en l'état par son auteur. Finalement, c'est en 1751 qu'Euler fait paraître le mémoire De la controverse entre MM. Leibniz et Bernoulli sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires (E168), qui reprend, bien sûr, beaucoup d'éléments du texte de 1747, mais avec des différences substantielles. D'Alembert réagit à ce dernier mémoire dans un texte qu'il envoie à l'Académie de Berlin en 1752, Sur les logarithmes des quantités négatives, pour faire connaître publiquement ses positions, émises dans sa

---

[8] EULER, *Opera*, series IVA, vol. 7, à paraître.

[9] EULER, *Opera*, series IVA, vol. 5, p. 252.

correspondance privée avec Euler, tout en confortant ses arguments. L'Académie de Berlin ne publiera pas ce texte.

Si le mémoire d'Euler publié en 1751 va jouer, on l'a dit, un double rôle pour les mathématiques et pour l'histoire des mathématiques, on peut penser que ce double objectif était consciemment visé par Euler, compte tenu du titre choisi lequel, contrairement à celui de son mémoire de 1747, ressemble davantage au titre d'un texte d'histoire que d'un mémoire de mathématiques. Une longue première partie de ce mémoire consiste ainsi à présenter les termes de la controverse sur les logarithmes entre Johann Bernoulli et Leibniz, en référant à la correspondance des deux savants qui venait de paraître en 1745[10]. Euler présente successivement le "sentiment de M. Bernoulli" avec ses "raisons" et les "objections" faites à ces raisons, puis il fait de même pour Leibniz. Il veut, écrit-il, faire sentir

> en toutes leurs forces toutes les contradictions auxquelles l'un et l'autre de ces deux sentiments est assujetti, afin qu'on soit d'autant mieux en état de juger combien il doit être difficile de découvrir la vérité et de la garantir contre toutes les objections, après que les deux plus grands hommes y ont travaillé en vain[11].

Euler réalise ainsi une véritable mise en scène, pour faire apparaître le caractère dramatique de la crise à laquelle sont ainsi confrontées les mathématiques pures, et pour mieux faire apprécier le véritable coup de théâtre que constitue le *Dénouement des difficultés précédentes*, qu'il apporte alors que tout était fait pour que l'on n'y croit plus. Cette présentation théâtrale a sans doute une vertu didactique, mais elle brouille, en fait, la réalité historique. En se reportant aux lettres échangées entre Leibniz et Johann Bernoulli en 1712-1713, on s'aperçoit que, si Euler rapporte bien quelques-uns des arguments utilisés par les deux savants, il est souvent infidèle aux originaux. On constate, en effet, que, d'une part, il a fait disparaître certains arguments jugés essentiels par leurs auteurs, s'évitant ainsi d'y répondre, et que, d'autre part, il a ajouté des arguments qui ne figurent pas dans leurs lettres. Ainsi attribue-t-il à Johann Bernoulli des raisons qui ont, en réalité, été données par d'Alembert dans ses lettres de 1747-1748 et auquel Euler répond, sans nommer son auteur.

Dans la seconde partie de son mémoire, consacrée au *Dénouement des difficultés précédentes*, Euler, avant de présenter en détail sa théorie des logarithmes, dégage ce qui lui semble être à la racine des contradictions

---

[10] BERNOULLI et LEIBNIZ, *CPM*.

[11] EULER 1751, *Opera*, series I, vol. 17, pp. 195-232, p. 196.

apparemment insolubles de ses prédécesseurs:

> C'est qu'on suppose ordinairement, presque sans qu'on s'en aperçoive, qu'à chaque nombre il ne répond qu'*un seul logarithme*, et pour peu qu'on y réfléchisse, on trouvera que toutes les difficultés et contradictions dont la doctrine des logarithmes sembloit embarrassée, ne subsistent qu'en tant qu'on suppose qu'à chaque nombre ne répond qu'un seul logarithme. Je dis donc, ajoute-t-il, pour faire disparaître toutes ces difficultés et contradictions, qu'en vertu même de la définition donnée, il répond à chaque nombre *une infinité de logarithmes*; ce que je démontrerai dans le théorème suivant[12].

Cette analyse sera largement reprise dans l'historiographie du sujet.

La définition du logarithme qu'utilise Euler dans sa théorie est la suivante:

> le logarithme d'un nombre proposé est l'exposant de la puissance d'un certain nombre pris à volonté, laquelle devient égale au nombre proposé[13].

Il s'appuie ainsi sur la présentation des fonctions élémentaires figurant dans son *Introductio*, où la fonction logarithme est définie comme fonction réciproque de la fonction exponentielle[14]: on a $z = \log y$ si $y = a^z$. A partir de là, il obtenait les développements en série entière de a^z et $\log(1+x)$ à l'aide de raisonnements de type "analyse algébrique", calculant avec les infiniment petits et les infiniment grands comme s'il s'agissait de nombres finis, tout en opérant les simplifications résultant de leur nature infinie[15].

Dans son mémoire, Euler utilise la relation $\log(1+\omega) = \omega$, pour ω infiniment petit, comme point de départ de la démonstration de son théorème[16] établissant l'existence d'une infinité de logarithmes pour chaque nombre x. Ecrivant un nombre fini quelconque x sous la forme $x = (1+\omega)^n$ avec $n = \infty$, il obtient la formule

$$y = \log x = nx^{\frac{1}{n}} - n, \text{ pour } n = \infty \;;$$

il en induit alors que log x admet une infinité de valeurs différentes, puisqu'un nombre x a n racines n-ièmes. La formule correspondante

---

[12] *Ibidem*, p. 210 (ce qui est souligné l'est par nous).

[13] *Ibidem*.

[14] EULER 1748, t. I, chap. VI, art. 102, *Opera*, series I, vol. 8-9.

[15] *Ibidem*, chap. VII.

[16] EULER 1751, *Opera*, series I, vol. 17, p. 210.

$$e^y = \left(1+\frac{y}{n}\right)^n, \text{ pour } n = \infty,$$

lui permet ensuite, en utilisant la forme trigonométrique des nombres "complexes", d'écrire explicitement les logarithmes du nombre

$$x = a + b\sqrt{-1} = c(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi),$$

sous la forme

$$y = \log x = C + (\varphi + p\pi)\sqrt{-1},$$

avec[17]

$$C = \log c = \log\sqrt{a^2+b^2} \text{ et } p = 2k \ (k \in \mathbf{Z}).$$

Euler remarque que le caractère multiforme (infinitiforme même, en utilisant sa terminologie de l'*Introductio*[18]) de la fonction logarithme correspond au fait qu'il existe une infinité d'angles φ dont les cosinus et sinus sont donnés[19]. En particulier, Euler trouve pour x < 0:

$$\log x = \log|x| + (\pi + 2k\pi)\sqrt{-1} \ (k \in \mathbf{Z}),$$

valeur qui n'est jamais réelle.

Euler parvient ainsi à une généralisation de la fonction logarithme usuelle, qui permet bien de retrouver celle-ci comme cas particulier lorsqu'on se restreint au cas où la variable est réelle positive. Il peut conclure:

> Ces exemples suffisent pour faire voir que l'idée des logarithmes que je viens d'établir, est la véritable, et qu'elle est parfaitement d'accord avec toutes les opérations que la théorie des logarithmes renferme, de sorte qu'on n'y rencontre plus aucune difficulté, et que toutes les contradictions auxquelles cette doctrine paroissoit assujettie, disparoissent entièrement. Par conséquent, ajoute-t-il, la grande controverse qui partagea autrefois MM. Leibniz et Bernoulli, est à présent parfaitement décidée, en sorte que ni l'un ni l'autre ne trouveroit plus le moindre sujet de refuser son consentement[20].

Cette affirmation peut paraître curieusement optimiste alors que la démonstration que présente Euler est loin d'être rigoureuse et qu'il connaît bien, par sa correspondance, l'opposition de d'Alembert à sa théorie, opposition qui se confirmera d'ailleurs après la publication de son mémoire. On

---

[17] *Ibidem*, p. 220.

[18] EULER 1748, t. I, art. 10, *Opera*, series I, vol. 8-9.

[19] On écrirait aujourd'hui $\log x = \log|x| + i\arg x$, où arg désigne la fonction argument, multiforme.

[20] EULER 1751, *Opera*, series I, vol. 17, p. 210.

peut penser que cette déclaration fait partie de la mise en scène d'Euler et qu'elle en constitue la conclusion logique. Elle exprime, en fait, son sentiment profond qu'il a trouvé la vraie solution du problème de l'extension de la fonction logarithme et que, comme il le souligne dans l'introduction de son mémoire, il ne saurait y avoir en mathématiques pures qu'une vérité car

> il n'y a aucun doute, écrit-il, que toutes ces contradictions, quelque ouvertes qu'elles paroissent ne peuvent être qu'apparentes, et qu'il n'y sauroit manquer des moyens pour sauver la vérité[21].

B. La conception de d'Alembert

D'Alembert, on l'a vu, a pris connaissance de la théorie d'Euler sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires dès la réception de la lettre de ce dernier du 29 décembre 1746. Cependant, il n'a découvert que postérieurement l'existence d'une controverse sur le sujet entre Johann Bernoulli et Leibniz, par la lecture du mémoire d'Euler de 1751; il n'a lu directement le contenu de leurs lettres que plus tardivement encore, au printemps 1752, comme il ressort de son manuscrit de 1752.

Ce thème des logarithmes est abordé par d'Alembert dans *toutes* ses lettres à Euler depuis celle du 29 janvier 1747 (réponse à la lettre d'Euler du 29 décembre 1746), jusqu'à celle du 27 octobre 1748, à partir de laquelle Euler ne répondit plus sur ce thème. Ces lettres permettent de suivre l'évolution de la pensée de d'Alembert, ses doutes et ses certitudes, ses hésitations et la radicalisation finale de ses positions. Beaucoup d'arguments sont avancés par d'Alembert dans ses lettres et plusieurs sont repris dans son texte de 1752. Cependant, on peut constater que tous n'ont visiblement pas la même valeur à ses yeux et que certains, qui reviennent régulièrement, jouent un rôle fondamental.

De ce point de vue, deux arguments de d'Alembert nous semblent ressortir: celui de l'aire sous l'hyperbole et celui de la liberté de choix du système de logarithmes, l'un ou l'autre étant mis en avant suivant le type de résultats à justifier. Ces deux arguments sont apparus dès la première lettre de d'Alembert à Euler sur le sujet, datée du 29 janvier 1747[22]; cependant, on constate qu'Euler n'y a pas répondu du tout, pour le premier, et n'y a pas répondu clairement, pour le second.

---

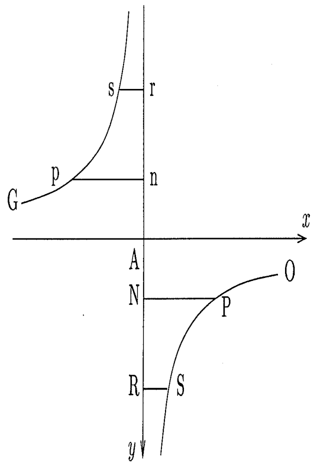
[21] EULER, *Opera*, series I, vol. 17, p. 196.

[22] EULER, *Opera*, series IVA, vol. 5, pp. 258-259.

1. L'aire sous l'hyperbole

Quand il avance cet argument, en 1747, d'Alembert ne sait pas qu'il avait déjà été donné, pour l'essentiel, par Johann Bernoulli dans sa lettre à Leibniz du 11 novembre 1712. Cependant, contrairement à Bernoulli, d'Alembert ne considère pas seulement l'aire sous l'hyperbole ordinaire d'équation $y = \frac{1}{x}$, mais aussi, par analogie, l'aire sous l'hyperbole généralisée d'équation $y = \frac{1}{x^3}$, pour laquelle le résultat est obtenu par intégration exacte; dans le texte de 1752, il considère, plus généralement, l'aire sous la courbe d'équation $x = \frac{a^n}{y^n}$, où n est un entier positif impair quelconque.

Prenons ici le coefficient a égal à 1; la figure est la suivante, en modernisant un peu la présentation des axes:



Il prend An = – AN et, utilisant la symétrie de la figure, considère que l'on a la relation suivante entre les aires:

$$a(\text{NPsr}) = a(\text{NPOA}) + a(\text{AnpG}) + a(\text{npsr}) = a(\text{npsr}),$$

la somme des deux premiers termes du second membre étant nulle. En prenant aussi Ar = – AR, toujours par symétrie, il obtient a(npsr) = a(NPSR), et en déduit que, dans le cas n = 1, cela donne log(Ar) = log(AR), c'est-à-dire log (–AR) = log (AR).

En explicitant les intégrales correspondant aux aires considérées par d'Alembert, on peut interpréter son raisonnement de la manière suivante.

Si on pose $a(y) = \int_{\mathrm{AN}}^{y} \frac{dy}{y^n}$, l'aire de la surface curviligne NPSR est représentée par: $a(y_R) = a(\mathrm{AR}) = \int_{\mathrm{AN}}^{\mathrm{AR}} \frac{dy}{y^n} > 0$. D'Alembert calcule alors de la façon suivante l'aire de la surface npsr:

$$a\,(y_r) = a\,(\mathrm{Ar}) = \int_{\mathrm{AN}}^{\mathrm{Ar}} \frac{dy}{y^n} = \int_{\mathrm{AN}}^{0} \frac{dy}{y^n} + \int_{0}^{\mathrm{An}} \frac{dy}{y^n} + \int_{\mathrm{An}}^{\mathrm{Ar}} \frac{dy}{y^n} = a\,(\mathrm{NPOA}) + a\,(\mathrm{AnpG}) + a\,(\mathrm{npsr}),$$

la première aire étant négative et les deux suivantes positives. En prenant An = – AN et Ar = – AR, il trouve

$$a\,(\mathrm{npsr}) = a\,(\mathrm{NPSR}) \text{ soit } \int_{\mathrm{AN}}^{-\mathrm{AR}} \frac{dy}{y^n} = \int_{\mathrm{AN}}^{\mathrm{AR}} \frac{dy}{y^n}.$$

Dans le cas $n = 1$, cas de l'hyperbole ordinaire, on obtient $\int_{\mathrm{AN}}^{y} \frac{dy}{y} = \log y$ et d'Alembert en déduit que $\log(-y) = \log y$. Donc, pour lui, la courbe "logarithmique" $x = \log y$ est constituée de deux branches symétriques par rapport à l'axe horizontal. Il utilise le cas où n est impair >1, cas où l'intégrale $\int_{1}^{y} \frac{dy}{y^n}$ se calcule exactement et est égale à la fonction algébrique paire $\frac{1}{n-1} - \frac{1}{(n-1)y^{n-1}}$, pour conforter sa conclusion.

C'est sur ce dernier point qu'Euler lui répond en argumentant que ce raisonnement par analogie n'est pas rigoureux[23], mais il ne répondra pas sur le premier, à savoir la comparaison des intégrales $\int_{\mathrm{AN}}^{\mathrm{AR}} \frac{dy}{y}$ et $\int_{\mathrm{AN}}^{-\mathrm{AR}} \frac{dy}{y}$ à l'aide des aires sous l'hyperbole ordinaire.

Cet argument va, d'ailleurs, poser longtemps encore des problèmes aux mathématiciens, l'erreur portant sur une question qui ne sera pas vraiment clarifiée avant Cauchy: l'usage des intégrales généralisées dans le calcul intégral. Ainsi, le calcul de d'Alembert repose sur l'affirmation que les deux

[23] L. EULER à d'Alembert, 15 avril 1747, EULER, *Opera*, series IVA, vol. 5, pp. 263-264.

aires, *a* (NPOA) et *a* (AnpG), sont égales en valeur absolue et de signes contraires. Or, chacune de ces deux aires correspond à une intégrale généralisée, divergente lorsque la courbe est l'hyperbole $x = \frac{1}{y}$: $\int_{\mathrm{AN}}^{0} \frac{dy}{y} = -\infty$, $\int_{0}^{\mathrm{An}} \frac{dy}{y} = +\infty$ et l'intégrale $\int_{\mathrm{AN}}^{\mathrm{An}} \frac{dy}{y}$ n'est pas nulle mais *indéterminée*.

C'est le fait que les aires, bien qu'infinies, sont égales en valeur absolue et de signes contraires qui conduit d'Alembert à penser qu'il peut écrire que leur somme est nulle. Cauchy clarifiera cette question[24] en définissant, à l'aide de la notion de limite, la notion d'intégrale généralisée $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$ d'une fonction lorsque l'une des bornes x_0, X est infinie ou lorsque f (x) devient infinie entre x_0 et X. Il montre en particulier que l'on a: $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x} = -\infty$, $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x} = +\infty$ et que l'intégrale $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x}$ est indéterminée car

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{-1}^{-\varepsilon\mu} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon\nu}^{1} \frac{dx}{x} \right] = \log(\frac{\mu}{\nu}),$$

où μ et ν sont deux constantes arbitraires.

2. Le caractère arbitraire du choix des logarithmes

Euler ayant, dans son mémoire de 1751, situé la clé du problème des logarithmes négatifs et imaginaires dans la reconnaissance du fait que la fonction logarithme est une fonction multiforme, et d'Alembert ayant refusé la théorie d'Euler, on a souvent considéré que la racine de son refus se situait dans une conception où à un nombre devrait correspondre un seul logarithme. La réalité est plus complexe. Dès sa première lettre du 29 janvier 1747, d'Alembert répond à Euler, qui lui a présenté les principaux résultats de sa théorie:

> A l'égard de la formule des arcs de cercle que vous m'opposés, Monsieur, j'avoue qu'elle donne une valeur imaginaire pour le log(-1). Mais je crois comme vous qu'une quantité peut avoir une infinité de logarithmes, et il ne

[24] CAUCHY 1823, 24e Leçon.

paroît pas entièrement démontré que la formule en question renferme tous les logarithmes possibles[25].

Autrement dit, d'Alembert ne remet pas en cause la formule donnée par Euler $\log(-a) = \log a + \pi(1 \pm 2n)\sqrt{-1}$, donnant une infinité de logarithmes pour (-*a*), mais il voudrait, au contraire, pouvoir y ajouter d'autres valeurs dont log(-1) = 0.

S'il y a, effectivement, incompréhension par d'Alembert de la théorie d'Euler, elle ne se situe donc pas exactement où on l'a souvent indiqué. Il exprime ainsi sa position dans le texte de 1752:

> Je crois donc qu'on peut supposer indifféremment ou réels ou imaginaires les logarithmes des quantités négatives. Tout dépend uniquement du système de logarithmes qu'on choisira. Mais je ne crois pas qu'on soit fondé à soutenir exclusivement et en général que les logarithmes des quantités négatives sont toujours imaginaires, […] il n'y a aucune liaison nécessaire entre une suite de nombres & la suite de logarithmes qui leur répondent[26].

Déjà dans la définition qu'il donne au début de son mémoire, il insiste sur le caractère arbitraire du choix des logarithmes:

> On appelle *logarithmes* une suite de nombres en progression arithmétique quelconque, répondans à une suite de nombres en progression géométrique quelconque. On suppose pour plus de facilité (car cette supposition est arbitraire) que le nombre qui représente l'unité dans la progression arithmétique, ait zéro pour logarithme: du reste la progression arithmétique est absolument à volonté, & peut suivre telle loi qu'on juge à propos[27].

D'Alembert va utiliser librement ce choix arbitraire du système de logarithmes pour répondre aux divers paradoxes analytiques auxquels conduit la relation log(-1) = 0, nécessaire pour avoir la relation log(-*x*) = log *x*. Ainsi, à la remarque d'Euler que cette supposition impliquerait aussi que $\log(\sqrt{-1}) = 0, \log(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}) = 0, \text{etc.}$, d'Alembert répond que cela ne le gêne pas car:

> Tout système de logarithmes est arbitraire en soy, et il est évident qu'au-dessous d'une progression géométrique quelconque, on peut imaginer la

---

[25] EULER, *Opera*, series IVA, vol. 5, p. 259.

[26] D'ALEMBERT 1752, f. 12r.

[27] *Ibidem*, f. 1v.

> progression arithmétique 0, 0, 0, &c. de manière que zéro sera le logarithme de chaque nombre correspondant[28].

Pour répondre à l'objection d'Euler, il introduit donc le système de logarithmes correspondant à la fonction identiquement nulle…

Alors qu'Euler cherche à généraliser la fonction logarithme usuelle, définie sur $]0,+\infty[$, d'Alembert considère des systèmes de logarithmes différents, c'est-à-dire des fonctions logarithmes différentes, lui permettant d'associer à volonté tel ou tel nombre à un nombre donné. En ce sens, à chaque nombre correspond donc, pour d'Alembert, une infinité de logarithmes et, en particulier, à un nombre négatif peut correspondre un logarithme réel[29]. D'Alembert confond ainsi l'infinité de fonctions logarithmes possibles (suivant la définition adoptée par lui de correspondance entre une suite géométrique et une suite arithmétique) et la multivocité de la fonction logarithme construite comme extension de la fonction logarithme usuelle. Il réaffirme fortement sa position en conclusion du texte de 1752:

> tout système de logarithmes est arbitraire; c'est pour cette raison que les logarithmes des quantités négatives peuvent être ou réels ou imaginaires, selon le système de logarithmes que l'on choisit. Par la même raison, ajoute-t-il, je crois qu'on peut affirmer […] que les logarithmes des nombres imaginaires peuvent être aussi réels dans certaines suppositions[30].

Il apparaît clairement que l'affirmation de d'Alembert n'est pas une réponse au problème tel que le posait Euler de la généralisation de la fonction logarithme usuelle, en liaison avec l'extension de son domaine de définition.

C. La suite des discussions sur la question des logarithmes: quelques éléments

Comme on l'a déjà rappelé, beaucoup d'auteurs ont écrit que le mémoire d'Euler de1751, en apportant la bonne théorie, avait mis fin au débat sur les logarithmes, seul d'Alembert faisant une vaine résistance. Citons encore J. Molk qui, reprenant l'article de A. Pringsheim et G. Faber

---

[28] *Ibidem*, f. 10 r-v.

[29] D'Alembert fait valoir ainsi qu'il ne s'oppose pas à la position d'Euler selon laquelle les logarithmes des nombres négatifs sont imaginaires en affirmant qu'ils sont réels mais seulement qu'ils *peuvent* être réels (voir, par exemple 1752, f. 1r).

[30] D'ALEMBERT 1752, f. 20 r-v.

dans l'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften,* écrit dans l'*Encyclopédie des sciences mathématiques*:

> En mettant en évidence que le logarithme peut prendre une infinité de valeurs complexes, L. Euler […] mit fin à une dispute célèbre concernant la nature des logarithmes des nombres négatifs […] et, plus généralement, des nombres complexes à laquelle prirent part plusieurs des plus grands géomètres du 18e siècle[31].

Mais, en réalité, il n'en a pas été ainsi. Cajori a relevé que la discussion sur les logarithmes s'était poursuivie, avec de nombreux participants, dans la deuxième moitié du XVIIIe siècle[32]. Considérons quelques épisodes de cette histoire.

1. Daviet de Foncenex, 1759

Dans son mémoire *Réflexions sur les quantités imaginaires*, publié dans le premier tome du périodique de la Société des sciences de Turin, Daviet de Foncenex, commente, notamment, le mémoire d'Euler sur les logarithmes, paru en 1751. Tout en approuvant la théorie d'Euler, qu'il expose, il signale que Johann Bernoulli avait donné dans sa correspondance avec Leibniz un argument, pour montrer que $\log(-x) = \log x$, utilisant la quadrature de l'hyperbole, argument "dont, remarque-t-il, Euler n'a pas même fait mention"[33]. Foncenex souligne alors la contradiction apparente entre le résultat de Bernoulli et les "calculs incontestables de M. Euler". Il se fait alors explicitement le porte-parole des vues de Lagrange sur le sujet. L'opinion qui en ressort est qu'il admet l'existence de plusieurs branches de la logarithmique, tout en affirmant que, si ces branches sont liées par une "continuité transcendante", car solutions de la même équation différentielle $dx = \frac{dy}{y}$, elles ne sont pas liées par une "continuité algébrique":

> Les deux branches de la logarithmique trouvées par M. Bernoulli sont donc isolées, indépendantes l'une de l'autre algébriquement, quoiqu'elles soient liées par leur expression transcendante; mais elles ne sont pas moins réelles

---

[31] MOLK 1911, p. 49, n. 140.

[32] CAJORI 1913, pp. 107-117.

[33] DAVIET DE FONCENEX 1759, p. 127.

> l'une que l'autre, & elles auront leurs usages particuliers dans plusieurs cas[34].

2. La réponse de d'Alembert, 1761

D'Alembert publie en 1761, dans le tome I de ses *Opuscules*, un mémoire *Sur les logarithmes des quantités négatives*. Il indique que c'est la publication du mémoire de Foncenex, qui l'a conduit à rendre publiques ses positions et il ajoute d'ailleurs un *Supplément* entièrement consacré à sa réponse au mémoire de Turin. D'Alembert y réaffirme sa conviction que non seulement la courbe logarithmique a deux branches, mais que celles-ci sont liées par la "loi de continuité", au même titre que les deux branches de l'hyperbole. Par ailleurs, il insiste à nouveau sur la liberté de choix du système de logarithmes.

3. La réponse de Foncenex, 1762

Foncenex a ainsi appris, en lisant le volume I des *Opuscules*, qu'à la controverse épistolaire entre Leibniz et Johann Bernoulli en avait succédé une autre, entre Euler et d'Alembert. Il écrit alors un nouveau texte *Eclaircissemens pour le mémoire sur les quantités imaginaires inséré dans le premier volume* qu'il publie dans le tome II des *Mélanges* de Turin. Il en ressort qu'il accepte finalement l'idée de d'Alembert que les deux branches réelles de la logarithmique sont liées par la "loi de continuité"[35]. Cependant, il continue de se dire en accord avec la théorie d'Euler. Il affirme ainsi une position éclectique:

> J'ai, si je ne me trompe, prouvé ici suffisamment, que les logarithmes tels que MM. Leibniz & Euler les ont considérés sont imaginaires pour les nombres négatifs; & d'un autre côté que la logarithmique a cependant deux branches, comme l'ont soutenu MM. Bernoulli & d'Alembert[36].

Il justifie cette position en introduisant une distinction entre la théorie arithmétique (Leibniz–Euler) et la théorie géométrique (Bernoulli – d'Alembert) des logarithmes. On va voir que cette thèse du décalage

---

[34] *Ibidem*, p. 138.

[35] Foncenex n'y faisant pas référence cette fois-ci, on ne sait pas si Lagrange partageait son opinion sur ce point.

[36] DAVIET DE FONCENEX 1762, p. 344.

entre un point de vue géométrique et un point de vue analytique sur la théorie des logarithmes va subsister assez longtemps.

4. L'évolution de la question en Italie et en France

Cajori relève que de nombreux mathématiciens italiens ont soutenu la position de d'Alembert sur les logarithmes, plutôt que celle d'Euler (Vincenzo Riccati, Giuseppe Calandrelli, P.M. Caldani, notamment)[37].

Paradoxalement, la situation était différente en France. Ainsi, dans le tome 3 de la seconde édition de l'*Histoire des mathématiques* de J.-E. Montucla, publié de manière posthume en 1802[38], on trouve cette remarque:

> Je finis cet article en observant que si de la multitude des suffrages on peut conclure en mathématiques, on doit regarder le sentiment de Leibnitz et d'Euler comme ayant l'avantage sur celui de Bernoulli et D'Alembert. [...] nos plus célèbres géomètres en France ont adopté l'opinion d'Euler pour les logarithmes imaginaires[39].

S.-F. Lacroix, après avoir présenté la théorie d'Euler, dans le tome I de la deuxième édition de son *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, formule d'abord le même argument que Montucla:

> et quoique d'Alembert, qui avait embrassé l'opinion de Bernoulli, n'ait point voulu admettre l'explication d'Euler, elle a reçu aujourd'hui l'assentiment des Analystes les plus distingués[40].

Mais il ajoute:

> Malgré cela, il faut convenir que la question des logarithmes des nombres négatifs, n'est peut-être pas exempte de nuages, surtout dans ce qui se rapporte à la considération des courbes, à cause de la difficulté de vérifier la loi de continuité, lorsqu'il y a un passage par l'infini[41].

---

[37] CAJORI 1913, pp. 112-115.

[38] Montucla a eu la possibilité de s'occuper entièrement, jusqu'au stade des épreuves, d'une partie seulement de ce tome, avant son décès. On ne sait pas si ce passage [art. XXXVII, p. 373 *sgg*.], notamment la remarque finale que nous reproduisons ci-après, est de lui ou de Lalande qui a achevé l'édition du volume. On sait que les sentiments des deux hommes vis-à-vis de d'Alembert étaient loin de coïncider.

[39] MONTUCLA 1802, pp. 379-380.

[40] LACROIX 1810, *Introduction*, p. 135.

[41] *Ibidem*, p. 135.

Dans le chapitre II du tome II de son *Traité*, consacré à la quadrature des courbes, Lacroix considère, en effet, l'argument de l'aire sous l'hyperbole en ces termes:

> La théorie que nous avons exposée d'après Euler [dans le tome I, Introduction], ne paraissant sujette en elle-même à aucune difficulté, et se trouvant contraire à cette conclusion [de Johann Bernoulli], ne permet d'attribuer la différence des résultats que donnent l'Analyse et la Géométrie, qu'à la présence de l'infini qui se rencontre dans le passage de la branche UCV à la branche ucv, d'où il résulte que les deux aires ne peuvent être contenues dans une même expression analytique, parce qu'elles ne sont pas unies par le lien de *continuité* que suppose une telle expression. […] les exemples que je vais rapporter […], feront voir évidemment que lorsqu'il y a passage par l'infini, on aurait tort souvent de conclure de la continuité qui règne entre les ordonnées, qu'il doit y en avoir aussi entre les aires[42].

Après l'exposé d'exemples concernant les hyperboles généralisées d'équation $y = \frac{1}{(1+x)^n}$, avec n entier > 1, il souligne que l'on ne peut rien en déduire pour le cas $n = 1$, et ajoute:

> Tout ce qu'on doit conclure des remarques précédentes, c'est que la marche du Calcul ne lui permet pas toujours d'exprimer toutes les circonstances qui se rencontrent dans les constructions géométriques, et que c'est de là seulement que peuvent naître les difficultés qui résultent quelquefois de la comparaison d'une théorie analytique bien établie par elle-même, avec les considérations géométriques. Ces difficultés, ajoute-t-il, ne sauraient d'ailleurs influer sur la vérité des propositions déduites du calcul, qui redevient conforme au cours des lignes lorsque ce qui tient à l'infini en est écarté[43].

Même si Lacroix a conscience que la difficulté est liée au problème de l'infini, il ne donne pas de réponse précise à l'argument de Bernoulli et de d'Alembert; il se contente de constater la dualité des résultats obtenus par l'utilisation des méthodes analytique ou géométrique, tout en choisissant de privilégier le résultat obtenu par l'analyse.

On constate donc que, si la conception d'Euler des logarithmes des nombres négatifs et imaginaires est adoptée majoritairement au début du XIX[e] siècle, tout n'est pas éclairci et le caractère erroné de l'argument essentiel de Bernoulli et d'Alembert n'est pas établi. Il nourrit même l'idée d'une

---

[42] LACROIX 1814, p. 161.

[43] *Ibidem*, p. 162.

inadéquation entre Analyse et Géométrie, constatée mais pas vraiment expliquée. Pour dépasser cette situation, il va falloir que soient reprises les bases du calcul intégral, et plus généralement, de l'Analyse; ce sera principalement l'œuvre de Cauchy. Dans son cours d'analyse de l'Ecole polytechnique, celui-ci définit analytiquement la fonction logarithme, pour les nombres réels ou imaginaires, comme réciproque de la fonction exponentielle, elle-même définie rigoureusement par la série $\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}$, dont il démontre la convergence pour tout x réel ou imaginaire[44]. Par ailleurs, sa théorie de l'intégrale définie lui permet de résoudre les paradoxes qui étaient apparus dans le calcul intégral lorsque la fonction prend des valeurs infinies sur l'intervalle d'intégration. Même s'il n'éprouve pas le besoin de répondre explicitement à l'argument géométrique de Bernoulli et d'Alembert, celui-ci est, de fait, invalidé par la théorie de l'intégration de Cauchy qui, dans le domaine réel, réconcilie Analyse et Géométrie.

Références bibliographiques

ALEMBERT, Jean Le Rond d'

1752 «Sur les logarithmes des quantités négatives», manuscrit du 16 juin 1752, Archives de l'Académie de Berlin, publié dans *Œuvres complètes de d'Alembert*, volume I/4a, «Textes de mathématiques pures», C. Gilain éditeur, Paris, CNRS Editions, 2007.

1761 *Opuscules mathématiques*, tome I, Mémoire 6, pp. 180-209, Supplément, pp. 210-230.

BERNOULLI, Johann et LEIBNIZ Gottfried Wilhelm

CPM Commercium philosophicum et mathematicum, 2 vol., Lausanne et Genève, 1745.

CAJORI, Florian

1913 «History of the exponential and logarithmic concepts», *The American Mathematical Monthly*, XX (1913), pp. 5-14, 35-47, 75-84, 107-117, 148-151, 173-182, 205-210.

CARTAN, Elie

1908 «Nombres complexes», dans *Encyclopédie des sciences mathématiques,* t. I, vol. 1, fasc. 3, pp. 329-468.

CAUCHY, Augustin-Louis

1821 *Cours d'analyse de l'Ecole polytechnique. Première partie: Analyse algébrique*, Paris; *Œuvres complètes* (II) 3.

1823 *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal*, Paris; *Œuvres complètes* (II) 4, pp. 1-261.

---

[44] CAUCHY, 1821, chap. IX.

COSTABEL, Pierre, WINTER, Eduard *et al.* (éd.)
1986 «Correspondance de Leonhard Euler avec P.-L.M. Maupertuis et Frédéric II», EULER, *Opera*, series IVA, vol. 6.

DAVIET DE FONCENEX, François
1759 «Réflexions sur les quantités imaginaires», *Miscellanea Philosophico-Mathematica Societatis Privatae Taurinensis*, t. I, 1759, pp. 113-146, 3e pagination.
1761 «Eclaircissemens pour le mémoire sur les quantités imaginaires inséré dans le premier volume», *Mélanges de Philosophie et de Mathématique de la Société Royale de Turin*, t. II, 1760-1761, pp. 337-344, 2e pagination.

EULER, Leonhard
Leonhardi Euleri Opera Omnia, series I-IV, Societatis Scientiarum Naturalium Helveticae, Basel, 1911- .
1747 «Sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires», *Opera*, series I, vol. 19, pp. 417-438.
1748 *Introductio in analysim infinitorum*, 2 vol., Lausanne, 1748; *Opera*, series I, vol. 8-9.
1751 «De la controverse entre MM. Leibniz et Bernoulli sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires», *Histoire de l'Académie de Berlin 1749*, 1751, pp. 139-179; *Opera*, series I, vol. 17, pp. 195-232.

JUSHKEVICH, Adolf P. et TATON, René (éd.)
1980 «Correspondance de Leonhard Euler avec A.C. Clairaut, J. d'Alembert et J.L. Lagrange», EULER, *Opera*, series IVA, vol. 5.

LACROIX, Sylvestre-François
1810-1814 *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, t. I, Paris, 1810; t. II, Paris, 1814.

MOLK, Jules
1911 «Analyse algébrique», *Encyclopédie des sciences mathématiques*, t. II, vol. 2, fasc. 1, pp. 1-93.

MONTUCLA, Jean-Etienne
1802 *Histoire des mathématiques*, 2e éd., t. 3, achevé et publié par J. Lalande, Paris 1802.