

Euler e Lagrange

DIONIGI GALLETTO* e BRUNO BARBERIS**

I. Euler a San Pietroburgo e a Berlino

Leonhard Euler a Basilea, dove nacque nel 1707, ebbe un grande maestro, Johann Bernoulli (1667-1748), fratello minore del grande Jacob Bernoulli (1654-1705). A Basilea ebbe modo di entrare addirittura in rapporti di amicizia con i figli di Johann Bernoulli, Niklaus II (1695-1726) e soprattutto Daniel Bernoulli (1700-1782), degno erede di suo padre Johann e di suo zio Jacob. La guida di Johann Bernoulli e l'ambiente particolarmente favorevole grandemente contribuirono alla sua formazione come matematico e fisico matematico, al punto che nel 1726, a soli diciannove anni, già scriveva il celebre saggio *Dissertatio physica de sono* ([10]), destinato a diventare un classico.

Nello stesso anno Euler si trasferiva a San Pietroburgo, presso quell'Accademia delle Scienze, invitato dalla zarina Caterina I, vedova di Pietro il Grande, su segnalazione dei fratelli Niklaus e Daniel Bernoulli che presso tale Accademia l'avevano preceduto due anni prima. A San Pietroburgo rimarrà una prima volta per quattordici anni, fino al 1741, anno in cui si trasferirà a Berlino, su invito di Federico il Grande, per riorganizzare quell'Accademia delle Scienze. A Berlino rimarrà per venticinque anni, ossia fino al 1766, per poi ritornare a San Pietroburgo, invitato dalla zarina Caterina II la Grande, dove rimarrà fino alla morte, avvenuta nel 1783.

Per motivi che appariranno chiari nel seguito, è opportuno considerare una differente suddivisione della sua vita, e cioè considerare separatamente il periodo che va dall'inizio della sua attività scientifica fino al 1755 e il periodo che va dal 1755 fino alla sua morte. Tale data si trova sostanzialmente a metà dell'intero arco su cui si estende la sua attività scientifica.

Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. del C.N.R.

* Accademia delle Scienze di Torino.

** Dipartimento di Matematica, Università di Torino.

Gli innumerevoli argomenti che affronta con il suo multiforme ingegno nel primo dei due suddetti periodi sono in gran parte i medesimi su cui ritornerà, arricchendoli, approfondendoli e spesso grandemente ampliandoli, nel secondo di tali periodi, quando a detti argomenti ne aggiungerà molti e molti altri ancora. Per gran parte di questi argomenti lascerà un segno che è tuttora più che mai vivo e che rimarrà vivo sempre. Questi argomenti riguardano l'algebra, la teoria dei numeri, i prodotti infiniti, le frazioni continue, le serie, i logaritmi, la teoria analitica delle funzioni trigonometriche, le serie trigonometriche, le funzioni di variabile complessa, la funzione che verrà poi chiamata la *funzione zeta* di Riemann (1826-1866), l'introduzione di celebri funzioni speciali come la *funzione beta* e soprattutto la *funzione gamma*, gli integrali ellittici, le equazioni differenziali ordinarie, le equazioni differenziali alle derivate parziali, la geometria differenziale delle curve e delle superficie, la meccanica di Newton (1642-1727) che viene da lui molto arricchita e approfondita, con i fondamenti precisati e ampliati e con i metodi sintetici e geometrici che la caratterizzavano sostituiti con i potenti metodi dell'analisi matematica, la meccanica dei corpi deformabili, studi sistematici concernenti la teoria matematica dell'elasticità e applicati a fili, a piastre e a colonne, l'equilibrio di corpi galleggianti e lo studio della relativa stabilità, la statica e la dinamica dei fluidi, la determinazione delle orbite dei pianeti e delle comete, studi relativi al moto di Giove e di Saturno e soprattutto della Luna, lo studio del problema dei tre corpi, studi di ottica e molti e molti altri argomenti ancora, ai quali occorre aggiungere l'intensa attività di cartografo da lui svolta durante la sua permanenza a San Pietroburgo, ecc.

Sono di quel periodo i suoi trattati *Mechanica* in due volumi [12], *Methodus inveniendi* [17], su cui si ritornerà tra poco, *Theoria motuum planetarum et cometarum* [16], *Introductio in analysin infinitorum* in due volumi [18], *Scientia navalis*, in due volumi [19], *Institutiones calculi differentialis* [26]. Tutto ciò, si ricordi, avveniva entro il 1755, anno in cui Euler compiva quarantotto anni.

Da questo lungo e incompleto elenco sono stati espressamente esclusi i contributi da lui dati al *calcolo delle variazioni* e al *principio della minima azione*, di cui si parlerà più diffusamente ora.

II. Euler e il calcolo delle variazioni

Partendo da ricerche avviate da vari suoi grandi predecessori, e precisamente Fermat (1601-1665), Newton, Leibniz (1646-1716), Jacob e Johann Bernoulli, Euler aveva intrapreso, fin dal 1727, e cioè da quando aveva vent'anni, studi di questo genere: dato un corpo pesante trovare il cammino che deve percorrere per passare nel minor tempo possibile da un punto a

quota più alta ad un altro a quota più bassa, dati due punti su una superficie trovare la linea di lunghezza minima che li congiunge, data una curva chiusa piana di lunghezza assegnata trovare quale configurazione deve avere perché l'area della porzione di piano da essa racchiusa risulti massima, ecc. Euler aveva affrontato una quantità innumerevole di tali problemi e di problemi che, dal punto di vista strettamente matematico, presentano analogie con essi ([11], [13], [14], [15]), ricorrendo a un metodo tipicamente geometrico per affrontarli e risolverli, e aveva raccolto quest'insieme di problemi da lui studiati nel suo grande e celebre trattato *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes* [17], apparso nel 1744¹. Si era però chiaramente reso conto, per sua stessa esplicita ammissione, che, per una trattazione rigorosa e sistematica, tutto quell'insieme di problemi da lui affrontati richiedeva l'intervento di un metodo puramente analitico. Nel suo *Methodus inveniendi* aveva infatti scritto al riguardo: «È pertanto desiderabile un metodo libero da considerazioni geometriche»². Comunque, per tutto questo complesso di ricerche e risultati, Euler va considerato come il vero fondatore di quel fondamentale ramo dell'analisi matematica che in seguito egli stesso chiamerà *calcolo delle variazioni*.

Con riferimento a un caso alquanto particolare costituito dal moto di un solo corpo, Euler aveva poi dato, nell'appendice II del suo *Methodus inveniendi*, una formulazione e soprattutto una giustificazione impeccabile del *principio della minima azione*, principio le cui origini vanno viste nel principio scoperto da Fermat relativo alla propagazione della luce e a cui avevano contribuito le indagini e riflessioni di Descartes (1596-1650) e di Leibniz, e di cui Pierre-Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759), a quell'epoca presidente dell'Accademia delle Scienze di Berlino, molto si era occupato in quegli anni ([58], [59]), con intendimenti e considerazioni che avevano però più carattere metafisico che scientifico. E su tale principio erano ritornati in seguito sia Maupertuis ([60]), essenzialmente divagando, che, ampiamente, Euler ([20], [21], [22], [23], [24], [25], ecc.), senza però giungere per esso dal punto di vista matematico, nonostante l'impegno da lui profuso, a una estensione in forma generale o, almeno, in una forma che andasse oltre quella da lui data in appendice al *Methodus inveniendi*³.

¹ Per un'analisi accurata dei lavori di Euler e dei suoi predecessori in tale campo si veda il notevole trattato di H.H. GOLDSTINE [41], ([41], 1, 2) e soprattutto i notevoli lavori di C.G. FRASER [37] e [38].

² Cfr. [17], p. 56; *Opera omnia*, p. 52.

³ Per una descrizione dei lavori di Maupertuis e di Euler sul principio della minima azione si veda [40], 3. Un'ampia e particolareggiata descrizione di [17], App. II è contenuta in [41], 2.7. Si veda anche [9], Part III, Chap. V; [57], 3, § 8.

Più precisamente, come si vedrà al § 7, la formulazione di tale principio nel caso di più corpi poteva anche apparire piuttosto semplice e naturale, ma mancava ad Euler, per sua esplicita ammissione, un adeguato strumento matematico che gli permettesse di giustificarla.

III. Lagrange

Questa era la situazione quando nel 1754 appare sulla scena un nuovo personaggio, che sarebbe ben presto diventato un altro grande protagonista della matematica e della meccanica dell'epoca. Quell'anno Euler, olimpico nella sua quiete berlinese, riceve una lettera inviatagli da Torino il 28 giugno proprio da questo personaggio che a lui, per il momento, è del tutto sconosciuto. Il personaggio in questione è Giuseppe Luigi Lagrange (1736-1813), a quell'epoca appena diciottenne, che ha addirittura il coraggio di rivolgersi direttamente a lui, il massimo matematico dell'epoca, per chiedergli il parere su certi risultati che ha ottenuto nel campo dell'analisi matematica, risultati in realtà già noti da circa sessant'anni.

Lagrange non aveva certo avuto i maestri che aveva avuto Euler, maestri della levatura di Johann Bernoulli o di suo figlio e amico Daniel. Al riguardo si può solo essenzialmente dire che se nei suoi studi all'Università un maestro egli ebbe, questo è stato il padre Giambattista Beccaria (1716-1781), che fu sostanzialmente un fisico sperimentale e a cui va in particolare il grande merito di avere, non appena giunto a Torino nel 1748, sgombrato immediatamente il campo dai fantasiosi vortici cartesiani lasciati come ricordo dal suo predecessore padre Francesco Garro (?-1754) e fondato il suo insegnamento sulla fisica di Newton. Fu Beccaria a suggerire a Lagrange di studiare il trattato di matematica *Elementa matheseos universae* ([63]) di Christian Wolff (1679-1754), trattato che certamente ha avuto un indubbio peso nella sua formazione scientifica e col quale Lagrange si avviò agli studi in campo matematico e fisico matematico essenzialmente da autodidatta. Nel 1754 Lagrange ha già letto, oltre al trattato di Wolff, la maggior parte dei trattati di matematica e di meccanica tra i più avanzati e famosi dell'epoca⁴, come ad esempio l'*Introductio in analysin infinitorum* di Euler ([18]), le *Lectiones Mathematicae de Methodo Integralium* di Johann Bernoulli ([2]), i due volumi della *Mechanica* di Euler ([12]), gran parte dei *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* di Newton ([61]), il *Traité de Dynamique* di d'Alembert (1717-1783) ([7]), ecc.

⁴ Si veda al riguardo [3], anche per il quadro generale in esso contenuto dell'ambiente culturale in cui ebbe a formarsi Lagrange.

Euler non risponde alla lettera di Lagrange ma la conserva, e il motivo quasi certamente va visto non tanto per quel che Lagrange riteneva di avere scoperto quanto per come si concludeva la lettera, con Lagrange che affermava che avrà forse da inviargli «alcune osservazioni sui *massimi e minimi* che si incontrano nei fenomeni della natura»⁵. Un'affermazione che doveva suscitare in Euler almeno una certa curiosità, in quanto lo riportava alle sue ricerche fermatesi vari anni prima e riguardanti il principio della minima azione.

IV. Il metodo delle variazioni

Quasi esattamente un anno dopo, spedita il 12 agosto 1755, giunge a Euler una seconda lettera di Lagrange, a quell'epoca diciannovenne, la quale non riguarda però, come ci si poteva attendere, il principio della minima azione, bensì l'intero contenuto del *Methodus inveniendi*, il grande trattato di Euler. Con quella lettera Lagrange comunicava infatti a Euler, esposto in poche pagine, quel metodo generale e puramente analitico, il *metodo delle variazioni*, che sta a fondamento del calcolo delle variazioni, metodo di cui Euler, nel suo trattato, come si è visto, aveva sottolineato la necessità e che, per sua stessa ammissione, aveva vanamente cercato, con una ricerca che aveva avuto inizio quasi trent'anni prima quando aveva solo vent'anni. Scrive Lagrange:

Studiando assiduamente, in questi ultimi giorni, la sua notevole opera sul metodo dei *massimi e minimi* applicato alle linee curve, ho infine trovato [...] un'altra via molto più rapida per risolvere questo genere di problemi, la quale porta a dimostrare le sue formule senza alcuna costruzione geometrica [...].

A questa lettera Euler risponde il 6 settembre scrivendo testualmente:

[...] sembra che lei abbia portato la teoria dei massimi e minimi pressoché al suo più alto grado di perfezione. [...] non solo nel mio trattato su questo argomento avevo desiderato trovare un metodo puramente analitico che permetta di dedurre le regole che vi sono presentate, ma successivamente avevo dedicato non pochi sforzi alla ricerca di tale metodo [...]. Ho dunque

⁵ La suddetta lettera di Lagrange a Euler, come tutta la corrispondenza tra i due grandi matematici sino all'ottobre 1759, è in latino. Successivamente, la corrispondenza è in francese. Nei brani che sono stati qui riportati della parte della corrispondenza che è in latino si è fatto uso del «lei», mentre nei brani riportati della restante parte della corrispondenza si è fatto uso del «voi». La corrispondenza tra i due grandi matematici è stata pubblicata, con pregevoli e dettagliati commenti esplicativi e con una notevole e vasta introduzione, da A.P. JUŠKEVIČ e R. TATON in [34].

quanto prima attentamente esaminato il suo metodo che, manifestamente, permette di ottenere con i soli strumenti dell'analisi le mie soluzioni dei problemi considerati, in modo molto più generale del mio metodo che si fonda su idee geometriche.

Queste due lettere costituiscono l'inizio di uno scambio di corrispondenza fra Lagrange e Euler che, salvo un paio di interruzioni, durerà per oltre vent'anni.

Nei mesi immediatamente successivi Lagrange invia a Euler un lavoro per la pubblicazione tra le Memorie dell'Accademia delle Scienze di Berlino, che Euler riceve ma che è finito perduto. Tale lavoro, come si può dedurre dalla corrispondenza immediatamente successiva intercorsa tra Euler e Lagrange, era il risultato delle ricerche a cui Lagrange aveva accennato a Euler nella sua prima lettera, quella del 28 giugno 1754, ossia riguardava il principio della minima azione.

Euler risponde il 24 aprile 1756 elogiando ancora Lagrange per il suo metodo delle variazioni e comunicandogli che il Presidente Maupertuis, nell'ammirare «la giustificazione che egli [e cioè Lagrange] aveva dato del principio della minima azione», aveva manifestato il proposito di farlo nominare membro dell'Accademia e di proporgli di trasferirsi a Berlino.

Il 19 maggio Lagrange comunica a Euler che si ritiene nel complesso soddisfatto della posizione che occupa a Torino ("Sostituto del Maestro di Matematica" nelle "Regie Scuole di Teorica di Artiglieria"), aggiungendo che ritiene che «il principio della minima azione si può considerare come la chiave universale di tutti i problemi sia statici sia dinamici». La lettera lascia chiaramente intendere che Lagrange è riuscito a formulare il principio della minima azione nel campo della meccanica in modo generale (o, almeno, piuttosto generale) e che, tramite il suo metodo delle variazioni, sa come utilizzarlo.

Il 2 settembre dello stesso anno, il 1756, Lagrange viene nominato membro dell'Accademia e il 5 ottobre, nel ringraziare, comunica a Euler che è in procinto di sistemare le sue ricerche sul metodo delle variazioni e sul principio della minima azione per inviarle all'Accademia.

A questo punto la corrispondenza tra i due matematici subisce un'interruzione, durata quasi tre anni, dovuta della guerra dei Sette Anni (1756-1763).

V. Lagrange e il suo primo trattato di meccanica analitica

Nel 1757 Giuseppe Angelo Saluzzo di Menusiglio (1734-1810), cultore di chimica, Lagrange e Gianfrancesco Cigna (1734-1790), medico e fisico,

fondano quella Privata Società Scientifica che, ventisei anni dopo, diventerà l'Accademia delle Scienze di Torino.

Nel 1759 la Privata Società Scientifica pubblica il primo volume delle *Miscellanea philosophico-mathematica Societatis Privatae Taurinensis*. In esso compare la prima delle due vastissime Memorie di Lagrange relative al suono apparse nelle *Miscellanea* ([44], [45]), nelle quali, tra l'altro, Lagrange, con grande competenza e preparazione matematica, direttamente si inserisce nella celebre controversia sulle corde vibranti che in quegli anni era sorta tra d'Alembert, Euler e Daniel Bernoulli. In tale volume non compare però nulla delle sue grandi ricerche concernenti il calcolo delle variazioni e il principio della minima azione e le loro applicazioni alla meccanica. Compare però, nelle considerazioni conclusive di una sua memoria ([43]) in esso pubblicata e concernente l'ordinaria teoria dei massimi e minimi per le funzioni in più variabili, l'affermazione che egli sta preparando un'opera in cui esporrà il suo metodo delle variazioni e dedurrà, «tramite il principio della minima azione, tutta la meccanica dei corpi, sia solidi che fluidi».

Il 28 luglio 1759 Lagrange invia a Euler il volume delle *Miscellanea*, comunicandogli contemporaneamente che ha quasi ultimato il trattato che sta preparando e che intende inviarlo per la sua pubblicazione a Berlino.

Euler, senza fretta, risponde a Lagrange il 2 ottobre prospettando le difficoltà che si presenterebbero nel pubblicare la sua opera a Berlino. La lettera di Euler, a differenza delle sue precedenti, si presenta piuttosto fredda, tanto che Euler in essa non rivela alcun interesse, di nessun genere, per il libro di Lagrange. Contemporaneamente Euler nella sua lettera commenta:

la sua soluzione analitica del problema isoperimetrico [e cioè, in sostanza, la sua scoperta del metodo delle variazioni] racchiude, come constato, tutto quanto può essere desiderabile in questa questione, e per parte mia provo grande gioia che questo argomento, del quale ero stato pressoché il solo a trattare dopo i primi vaghi tentativi, sia stato portato da lei al suo più alto grado di perfezione

e informa Lagrange che

l'importanza della questione mi ha incitato, con l'ausilio della luce da lei gettata, a cercare io stesso una mia soluzione analitica, che comunque ho deciso di non rendere pubblica fino a quando lei stesso non avrà rese pubbliche le sue riflessioni, al fine di non togliere nulla alla gloria che le è dovuta.

Euler aveva infatti presentato all'Accademia delle Scienze di Berlino, rispettivamente il 9 settembre e il 16 settembre 1756, e cioè proprio nei giorni in cui Lagrange veniva eletto socio dell'Accademia e a sua insaputa, due vaste memorie aventi rispettivamente per titolo *Analytica explicatio methodi*

maximorum et minimorum e *Elementa calculi variationum*, in cui, abbandonati del tutto i metodi di indagine che aveva seguito nel *Methodus inveniendi* (fondati su ragionamenti di tipo essenzialmente geometrico), aveva fatto oggetto delle sue indagini il metodo, avente carattere puramente analitico, scoperto da Lagrange. Queste due memorie vennero successivamente inviate e presentate all'Accademia delle Scienze di San Pietroburgo nel 1760 (quasi certamente perché nel 1757 l'Accademia di Berlino aveva sospeso temporaneamente le pubblicazioni) e pubblicate nel 1766 ([29], [30]).

Nella sua lettera Euler informa inoltre Lagrange che sta scrivendo un trattato sul calcolo integrale⁶.

Il 23 ottobre 1759, e cioè venti giorni dopo, Euler comunica a Lagrange di aver ricevuto il volume delle *Miscellanea*, si profonde in elogi per il contributo che Lagrange ha saputo dare al problema delle corde vibranti e alla propagazione del suono, aggiunge svariate considerazioni al riguardo, riferisce sul suo terzo volume che ha appena ultimato della sua *Mechanica*⁷, ma non fa più alcun cenno al libro di Lagrange e alle ricerche di Lagrange sul calcolo delle variazioni e sull'applicazione del principio della minima azione alla meccanica. Evidentemente tale trattato, anche se non aveva avuto modo di vederlo, non era stato di suo gradimento.

Il 24 novembre, un mese dopo, Lagrange risponde alle due lettere di Euler senza parlare più del suo trattato e aggiungendo invece:

Ho anch'io composto degli elementi di Meccanica e di Calcolo differenziale e integrale ad uso dei miei studenti, e credo di aver sviluppato la vera metafisica dei loro principi, tanto quanto è possibile,

senza però affatto dire, per prudenza, che cosa effettivamente intenda per tale "vera metafisica", mantenendosi anzi al riguardo, a differenza di quanto aveva fatto con la sua lettera del 12 agosto 1755, addirittura ermetico.

La corrispondenza tra Lagrange e Euler prosegue nei mesi successivi ed è praticamente per intero dedicata a problemi di propagazione del suono e a questioni connesse e a metà del 1760 subisce un'altra interruzione.

VI. Il secondo volume delle *Miscellanea*

Nel 1762 compare il secondo volume delle *Miscellanea*, relativo agli anni 1760-61, contenente un lavoro alquanto rilevante di Euler sulla mecca-

⁶ Si tratta della prima parte delle *Institutiones calculi integralis* ([31]).

⁷ Si tratta di ([28]) che Euler considera come terzo volume della sua *Mechanica* ([12]).

nica dei corpi deformabili⁸, la seconda imponente memoria di Lagrange sul suono e sulle corde vibranti ([45])⁹, e, soprattutto, le sue due memorie: *Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les "maxima" et les "minima" des formules intégrales indéfinies* ([46]) e *Application de la méthode précédente à la solution de différens problèmes de dynamique* ([47]).

Il 14 giugno 1762 Lagrange invia il volume a Euler e nell'ottobre dello stesso anno, non avendo ricevuto risposta, gli invia nuovamente il volume con una lettera in cui, riferendosi unicamente al suo metodo delle variazioni, stanno scritte le seguenti frasi, altamente significative e illuminanti e in cui si può cogliere un tono quasi sarcastico:

Avendo appreso da una delle vostre lettere del 1759¹⁰ che avete dato tanta importanza al mio metodo sui *massimi* e *minimi* [ossia al suo metodo delle variazioni] tanto da estenderlo e perfezionarlo in un trattato particolare, ho ritenuto di dover sopprimere interamente quello che avevo già quasi ultimato su questo argomento, e limitarmi ad esporne semplicemente i principi in una memoria che ho cercato di rendere più breve possibile; [...] vi prego di ricevere i miei più umili ringraziamenti per l'onore che mi avete fatto, e che io considero come la ricompensa più lusinghiera per i miei studi matematici.

Il trattato di cui Lagrange aveva parlato nella sua lettera del 28 luglio 1759 e che intendeva addirittura pubblicare a Berlino a questo punto scomparire, e per sempre, almeno per quanto riguarda la sua prima parte, e viene sostituito dall'*Essai*, lungo poco più di venti pagine (la maggior parte delle quali dedicate ad applicazioni illustrative), estremamente scarno e conciso, anzi eccessivamente, tanto da lasciare l'impressione in chi legge che esso presenti in più di un punto aspetti di natura formale. E ciò per il modo stesso di procedere nelle deduzioni, private totalmente nell'*Essai* delle necessarie premesse e considerazioni esplicative. Premesse e considerazioni che invece abbondano, tanto da presentarsi addirittura ridondanti, nelle due memorie che, come si è detto, Euler aveva approntato e che appariranno nel 1766.

Nonostante quanto ora rilevato nei riguardi dell'*Essai*, l'analisi matematica, che sino a quel momento si era sviluppata fondandosi unicamente sulle nozioni e operazioni di differenziazione (e quindi di derivazione) e di inte-

⁸ Questo lavoro, costituente una sintesi di vari risultati conseguiti da Euler in quegli anni nell'ambito della meccanica dei corpi deformabili, venne inviato da Euler a Lagrange sotto forma di una lunga lettera che venne quasi per intero pubblicata da Lagrange nel suddetto volume. Si veda [27].

⁹ A questa segue, nel secondo volume delle *Miscellanea*, un ulteriore lavoro di Lagrange sul suono ([48]).

¹⁰ È, come si è ricordato, la lettera del 2 ottobre 1759.

grazione, viene arricchita, con questa memoria di Lagrange, di una nuova operazione: quella di *variazione*¹¹.

VII. Il contenuto del trattato soppresso

Nella sua lettera a Euler del 14 giugno 1762 Lagrange, come si è osservato, aveva usato toni quasi sarcastici nell'accennare all'*Essai*. E alla memoria *Application de la méthode précédente à la solution de différens problèmes de dynamique* non aveva addirittura riservato nemmeno una parola, ben ricordando che Euler si era sempre dimostrato freddo e privo di interesse sia nei riguardi del suo trattato sia di fronte alle sue affermazioni entusiastiche relative al principio della minima azione.

Anche tale memoria, nonostante la sua imponente mole di cento e più pagine, si presenta, al pari dell'*Essai*, alquanto scarna e frammentaria. Essa costituisce sostanzialmente una sintesi, sia pure molto ampia, di quella che doveva essere la seconda parte del trattato di Lagrange.

L'introduzione è ancora più scarna di quella dell'*Essai* e consiste sostanzialmente nell'affermazione che lo scopo della memoria è quello di generalizzare il principio che Euler ha dimostrato «in un'appendice alla sua eccellente Opera che ha per titolo *Methodus maximorum etc.*»¹² e «di farne vedere l'uso per risolvere con facilità tutte le questioni di Dinamica».

È questa l'introduzione. Lagrange enuncia poi immediatamente la generalizzazione che dà del “principio”, chiamandolo semplicemente “Principio generale”:

Sia dato un numero qualunque di corpi che agiscano gli uni sugli altri in modo qualsiasi e che siano, se si vuole, soggetti a forze centrali proporzionali a delle funzioni qualsiasi delle distanze: la somma degli integrali dei prodotti delle masse per le rispettive velocità per i rispettivi elementi d'arco percorsi sarà sempre un massimo o un minimo.

Enunciato il “principio generale”, Lagrange passa quindi subito alle applicazioni di esso alla dinamica¹³, tramite il ricorso al suo metodo delle va-

¹¹ Per un'analisi accurata e dettagliata dei contributi di Lagrange al calcolo delle variazioni si rimanda ai lavori di C.G. FRASER ([36], [37]), nonché al trattato di H.H. GOLDSTINE [41], [41], 3.1, 3.2, 3.3, 3.6).

¹² È l'appendice a cui si è ampiamente accennato al § 2. Il trattato è ovviamente il *Methodus inveniendi*, il cui titolo viene da Lagrange riassunto il più possibile e con la sostituzione del termine *inveniendi* con il termine *maximorum*, meno significativo.

¹³ Per un'analisi approfondita e accurata dei fondamenti dell'*Application*, si veda il pregevole lavoro di C. G. FRASER [35], ([35], Parte I). Si veda anche [1].

riazioni, con il testo che si presenta subito, analogamente all'*Essai*, estremamente, anzi addirittura fastidiosamente, scarno e conciso.

Nemmeno una parola di commento quindi, nessuna considerazione esplicativa e giustificativa per tale “principio generale”. Nessun accenno al lavoro che all’inizio del 1756 aveva inviato a Euler per la pubblicazione e di cui non aveva più saputo nulla. Nessun accenno a Maupertuis, nessun accenno alla storia del principio della minima azione, più nessuna affermazione entusiastica come quella che tale principio «si può considerare come la chiave universale di tutti i problemi, sia statici che dinamici». Tale “principio” infatti è in sostanza proprio il principio della minima azione, per la prima volta formulato in modo alquanto generale, principio che – se si tiene presente che, nelle innumerevoli applicazioni che fa di esso, Lagrange lo affianca e collega sistematicamente, come in effetti deve essere (in quanto le forze che considera sono conservative), al principio della conservazione dell’energia – viene a tradursi sostanzialmente nel *principio dell’azione stazionaria* formulato da Jacobi (1804-1851) oltre ottant’anni dopo.

Nell'*Application*, pertanto, al principio su cui Euler tanto aveva scritto e Maupertuis tanto aveva divagato, non viene conservato nemmeno il nome (che risulta invero improprio, come si può constatare dall’enunciato che ne dà Lagrange e come Lagrange stesso rileverà nella sua *Mécanique analytique* [53], [56]): esso diventa un principio anonimo, che viene però eretto a “principio generale” nel campo della dinamica.

VIII. Euler e il principio della minima azione

Euler, ricevuto finalmente il volume delle *Miscellanea*, scrive a Lagrange il 9 novembre 1762, profondendosi in grandi elogi per i contributi di Lagrange in esso contenuti, ma riferendosi essenzialmente alle ricerche di Lagrange relative alla propagazione del suono. Nella lettera si trova infatti soltanto un brevissimo accenno alla monumentale *Application*:

Quale soddisfazione proverebbe il Sig. de Maupertuis, se egli fosse ancora in vita, nel vedere il suo principio della minima azione portato al più alto grado di dignità di cui esso sia suscettibile.

Non una parola di più, in perfetta coerenza con l’atteggiamento che egli sempre aveva assunto nei riguardi delle ricerche di Lagrange concernenti il principio della minima azione. Pochissime parole vengono spese anche per l'*Essai* che viene considerato per ultimo, parole che vengono spese essenzialmente come introduzione ad alcune sue considerazioni relative ad un’applicazione fatta nell'*Essai* da Lagrange.

In questo atteggiamento di Euler, che dura ormai da vari anni, si può cogliere, quanto meno, un disappunto che non è certo da poco: la formulazione del “principio generale” che viene data da Lagrange è la naturale generalizzazione, come Lagrange stesso esplicitamente riconosce, del principio che Euler aveva formulato e giustificato nel caso di un solo corpo, una generalizzazione che Euler, come si è ricordato al § 2, avrebbe potuto formulare già ai tempi della pubblicazione del suo *Methodus inveniendi*, nel 1744, ma che non fece perché non aveva la possibilità di applicarla e nemmeno la possibilità di fornirne una valida giustificazione, non essendo in possesso di quell’indispensabile metodo, il metodo delle variazioni, da lui vanamente cercato e scoperto undici anni dopo da Lagrange. Di qui – il non aver avuto la possibilità (e aver perso definitivamente l’occasione) di scoprire e applicare realmente in tutta la sua generalità alla meccanica il principio della minima azione, su cui tanto aveva lavorato e scritto – ha avuto certamente origine la freddezza (e cioè il non gradimento) che aveva manifestato sin dall’inizio nella corrispondenza con Lagrange ogni volta che Lagrange faceva riferimento al principio della minima azione, sia con il lavoro sull’argomento inviato all’Accademia di Berlino per la pubblicazione e finito perduto, sia con i continui espliciti commenti e considerazioni nelle sue lettere, che culminarono addirittura con la comunicazione della stesura di un intero trattato sull’argomento.

Si può anzi ritenere che, considerando sia la naturale spiccata propensione di Euler a scrivere, sia soprattutto, come si è visto al § 2, il grande numero di lavori da lui pubblicati in passato sul principio della minima azione, un trattato su tale argomento Euler avesse quasi certamente in animo di scriverlo, una volta pervenuto, sia pure non con i metodi suoi ma con il metodo delle variazioni di Lagrange, alla formulazione e alla giustificazione del principio della minima azione in forma generale. Con l’arrivo a Berlino delle prime lettere di Lagrange e soprattutto del lavoro di Lagrange finito perduto (lavoro che certamente costituiva un primo abbozzo dell’*Application*¹⁴), Euler si vedrà preceduto da Lagrange e pertanto il suo interesse per il principio della minima azione, in passato così vivo, cesserà improvvisamente e completamente, e per sempre.

Motivi di obiettività impongono comunque a questo punto di aggiungere che anche l’atteggiamento di Lagrange nei riguardi di Euler presenta aspetti sconcertanti: comunica a Euler il suo metodo delle variazioni nel 1755, attende a pubblicarlo (e solo in sintesi perché risentito) fino al 1762 e contemporaneamente, poco più che ventenne, coltiva in cuor suo la pretesa che Euler, il più grande matematico dell’epoca, non intraprenda ulteriori ricerche

¹⁴ Per una ricostruzione del contenuto di tale lavoro si veda [40], 7.

in un campo, il calcolo delle variazioni, di cui va considerato come il fondatore e su cui in passato, per oltre vent'anni, aveva tanto intensamente lavorato, scrivendo al riguardo addirittura uno dei suoi massimi trattati, il *Methodus inveniendi*.

IX. La Méchanique analytique

Con la pubblicazione dell'*Essai*, e soprattutto dell'*Application*, si conclude la storia, alquanto mal nota, del primo trattato scritto da Lagrange, finito soppresso e consistente in un vero e proprio trattato di meccanica analitica¹⁵.

Con la lettera di Euler del 9 novembre 1762 la corrispondenza tra i due matematici si interrompe nuovamente, con un'interruzione che durerà sino al 1765.

A portare Lagrange alla determinazione di non pubblicare il trattato può comunque quasi certamente aver contribuito anche un fatto nuovo, collegato “alla vera metafisica” dei principi della meccanica che egli avrebbe nel frattempo scoperto e sviluppato e di cui aveva accennato in termini addirittura ermetici a Euler nella lettera del 24 novembre 1759.

Purtroppo del testo a cui fa riferimento nella sua lettera si è persa ogni traccia da circa due secoli¹⁶ ma si può comunque con certezza ritenere che tale “metafisica” consista nel *principio dei lavori virtuali* e nei suoi conseguenti sviluppi e implicazioni. La formulazione di tale principio¹⁷, in termini

¹⁵ Per un'esposizione dettagliata di tale storia si veda [40], 2, 3, 4, 5, 6, 7. Per una storia dei rapporti tra Euler e Lagrange si vedano anche la notevole introduzione contenuta in [34] già citata nella nota 5 e [62]. Per avere un'indicazione di quanto sia mal nota la suddetta storia, e soprattutto quella del metodo delle variazioni, è sufficiente andare a leggere la famosa *Notice sur la vie et les ouvrages de M. le Comte J.-L. Lagrange* del celebre DELAMBRE (1749-1822), pubblicata a Parigi nel 1816 ([8]), la quale, pur essendo per vari aspetti alquanto bella, è al riguardo estremamente confusa e non esente da numerosi e gravissimi errori di carattere storico e interpretativo. Essa purtroppo ha ispirato e influenzato quasi tutta la storiografia successiva concernente Lagrange (come si può ad esempio constatare consultando, per citarne alcuni, i libri di storia della matematica di M. MARIE, W.W. ROUSE BALL, G. LORIA, H.W. TURNBULL, E.T. BELL, A. HOOPER, E.E. KRAMER, ecc.), in quanto è la descrizione dei fatti contenuta in essa e la relativa interpretazione datane da Delambre che sono state sistematicamente riportate si può dire sino ad oggi. L'osservazione ora fatta vale anche in particolare per la notevole biografia che F. BURZIO ha scritto su Lagrange, pubblicata a Torino nel 1941 ([4]) e ristampata, con una vasta introduzione dedicata ai biografi di Lagrange, nel 1993. A rigore, occorre dire che non cadono in tale errore R. TATON e A. JUŠKEVIČ nella loro pregevole introduzione ricordata nella nota 5, ma non, ad esempio, I. GRATTAN-GUINNESS, che in ([42]) ha scritto che la descrizione fatta da Delambre non è in realtà confusa, ma semmai troppo breve, riconoscendole con ciò una validità che è ben lungi dall'averne.

¹⁶ Si veda al riguardo [40], 10.

¹⁷ Per una storia di tale principio si rimanda ai notevoli testi [5] e [6].

sostanzialmente generali anche se per qualche aspetto non ancora perfetta, era stata data da Johann Bernoulli oltre quarant'anni prima, ma tutta la grande portata di tale principio sino a quel momento non era ancora stata colta ed era sfuggita anche a Euler.

Nel 1764 Lagrange ha pronta la sua memoria *Recherches sur la libration de la Lune* ([51]), in cui, partendo dal cosiddetto *principio di d'Alembert* (esposto in modo alquanto intricato e fumoso da d'Alembert nel suo *Traité de dynamique* del 1743 [7]) e tramite il ricorso al principio dei lavori virtuali, perviene alla fondamentale *equazione simbolica della dinamica*, da cui, nella sua memoria *Théorie de la libration de la Lune* del 1780 ([52]), dedurrà le celebri equazioni che portano il suo nome. Da questo complesso di ricerche di Lagrange, che ha all'origine il principio della minima azione e il metodo delle variazioni, scaturirà il suo grande trattato *Mécanique analytique*, apparso nel 1788.

X. Gli sviluppi del calcolo delle variazioni

Alle due memorie che Euler aveva presentato all'Accademia delle Scienze di Berlino nel 1756 e che, come si è ricordato, verranno pubblicate a San Pietroburgo nel 1766, Euler aggiungerà la vasta appendice *De calculo variationum* al terzo volume del suo trattato *Institutiones calculi integralis* ([31]), apparso nel 1770, nonché il lavoro *Methodus nova et facilis calculum variationum tractandi* ([32]), pubblicato, sempre a San Pietroburgo, nel 1772. I primi tre di tali lavori sono interamente fondati sul metodo di Lagrange e nelle loro introduzioni Euler riconosce esplicitamente a Lagrange la paternità di tale metodo.

Lagrange pubblicherà sull'argomento un ulteriore lavoro *Sur la méthode des variations* ([49]), col quale fornirà altri relevantissimi contributi, ampliando e arricchendo di molto i contenuti dell'*Essai*¹⁸. Con tale lavoro, la cui stesura risale al 1770, e che verrà pubblicato anch'esso sulle *Mélanges* di Torino, Lagrange, tra l'altro, ribadirà con fermezza la paternità non solo del suo metodo delle variazioni ma anche del "principio generale" che è alla base dell'*Application*. Sul suo metodo ritornerà poi ancora nel suo trattato *Théorie des fonctions analytiques* ([54])¹⁹ del 1797 e soprattutto, anche con un'ampia e obiettiva ricostruzione storica, nel suo trattato *Leçons sur le calcul des fonctions* ([55])²⁰ del 1806.

¹⁸ Per un'analisi accurata di tale lavoro si veda [41], 3.3.

¹⁹ Si veda al riguardo [36], II; [41], 3.5.

²⁰ Si veda al riguardo [36], II; [41], 3.5.

Le ricerche sul calcolo delle variazioni nell'indirizzo di Lagrange saranno riprese successivamente da Legendre (1752-1833) e, nel secolo successivo, da grandi matematici come Jacobi (1804-1851), Hamilton (1805-1865), Weierstrass (1815-1897), fino a Hilbert (1862-1943), ecc.²¹

Comunque, come si è detto al § 2, per tutto quel complesso di ricerche da lui effettuate e per i risultati da lui ottenuti che culminarono con il suo grande trattato *Methodus inveniendi*, è Euler che va considerato come il vero fondatore del calcolo delle variazioni.

A questo punto si potrebbe pensare che la grande scoperta di Lagrange abbia in un certo senso ridotto o addirittura oscurato la portata delle ricerche di Euler in tale campo. Ma così non è stato: i metodi sviluppati da Euler, tramite i quali ha più che mai fornito una misura del suo grande e multiforme ingegno, che con la scoperta del metodo delle variazioni da parte di Lagrange potevano apparire superati (come in effetti sono stati considerati per tutto il secolo successivo), hanno nel secolo scorso conosciuto nuova vita e nuova luce con l'introduzione, da parte di vari eminenti matematici, di nuovi metodi nel campo del calcolo delle variazioni, i cosiddetti "metodi diretti", che si collegano ai metodi sviluppati da Euler mettendone in evidenza la loro portata e, soprattutto, la loro attualità.

XI. Dopo il 1762

La corrispondenza tra Euler e Lagrange, interrotta nel 1762, riprenderà, come si è accennato, verso il 1765 con toni che si faranno presto calorosi e verterà sui più disparati argomenti, che vanno dalle corde vibranti a problemi vari e di grande rilevanza di teoria dei numeri, all'integrazione di particolari importanti tipi di funzioni. Lagrange aggiungerà addirittura una sua appendice di quasi trecento pagine ([50]) agli *Eléments d'algèbre* di Euler, nella loro versione in francese, apparsi nel 1774 ([33]).

Entrambi saranno attivissimi fino alla loro morte, con la produzione di Euler, spesso prolisso ma sempre profondo, che assumerà dimensioni imponenti, produzione che riguarderà tutti i campi della matematica dell'epoca, anticipandone addirittura di nuovi, come, ad esempio, la topologia. La produzione di Lagrange sarà invece molto più contenuta, anche perché, per sua natura, Lagrange fu sempre tendenzialmente conciso. Entrambi lasceranno ovunque segni perenni e il confronto tra essi si presenta pertanto non semplice, anche se si può affermare senza incertezze che il segno lasciato nell'insieme da Euler è più profondo ed esteso del segno lasciato da Lagran-

²¹ Si veda al riguardo [41], [39].

ge. Questo vale naturalmente per le matematiche, perché nel campo della meccanica, nonostante i fundamentalissimi contributi dati da Euler ai suoi fondamenti, alla teoria dei corpi rigidi e alla teoria dei corpi deformabili, il primato spetta fuor di discussione a Lagrange per la sua meccanica analitica, la “meccanica alternativa” a quella di Newton.

Euler, come si è ricordato, aveva lasciato Berlino nel 1766 per ritornare a San Pietroburgo e in quell’occasione propose a Lagrange di lasciare Torino e di seguirlo. Lagrange ovviamente rifiutò perché nel frattempo gli era stato proposto di trasferirsi a Berlino per occupare il posto lasciato libero da Euler. Secondo soltanto a Euler in tutto il mondo, a Torino la sua posizione era rimasta sempre la stessa di dieci anni prima, e cioè quella di “sostituto del maestro di matematica” nelle “Regie Scuole di Teorica di Artiglieria”. Lascerà Berlino vent’anni dopo, nel 1786, per passare a Parigi, dove morirà a settantasette anni nel 1813. Euler, che Lagrange considerò sempre come suo maestro, era morto nel 1783 a San Pietroburgo a settantasei anni. Non si incontrarono mai.

Bibliografia

- [1] BARROSO FILHO W., COMTE C., *La formalisation de la dynamique par Lagrange (1736-1813)*, in «Science à l’époque de la Révolution Française: Recherches Historiques», R. Rashed (ed.), Blanchard, Paris, 1988, pp. 329-348.
- [2] BERNOULLI Johann, *Lectiones mathematicae de methodo integralium*, in Joh B., *Opera*, vol. III, Bousquet, Losanna e Ginevra, 1742, pp. 385-558.
- [3] BORGATO M.T., PEPE L., *Lagrange a Torino (1750-1759) e le sue lezioni inedite nelle R. Scuole di Artiglieria*, Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche, VII, n. 2 (1987), pp. 3-43.
- [4] BURZIO F., *Lagrange*, UTET, Torino, 1941.
- [5] CAPECCHI D., *Storia del Principio dei lavori virtuali. La meccanica alternativa*, Hevelius, Benevento, 2002.
- [6] CAPECCHI D., DRAGO A., *Lagrange e la storia della meccanica*, Progedit, Bari, 2005.
- [7] D’ALEMBERT J., *Traité de dynamique*, David, Paris, 1743.
- [8] DELAMBRE M., *Notice sur la vie et les ouvrages de M. Le Comte J.-L. Lagrange*, Mémoires de la Classe des Sciences Mathématiques et Physiques de l’Institut pour le 1812, Paris, 1816; in *Oeuvres de Lagrange publiées par J.-A. Serret*, vol. I, Paris, Gauthier-Villars, 1867, pp. IX-LI.
- [9] DUGAS R., *A History of Mechanics*, Ed. du Griffon, Neuchâtel, 1955.

- [10] EULER L., *Dissertatio physica de sono*, Basilea, 1727; in EULER, *Opera*, series III, vol. I, Lipsia e Berlino, 1926, pp. 181-196.
- [11] EULER L., *De linea brevissima in superficie quacunq̄ue duo quaelibet puncta iungente*, Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, vol. 3 (1728), 1732, pp. 110-124; in EULER, *Opera*, series I, vol. XXV, Berna, 1952, pp. 1-12.
- [12] EULER L., *Mechanica sive motus scientia analytice exposita*, 2 voll., Academia Scientiarum, Petropoli, 1736; in EULER, *Opera*, series II, Voll. I-II, Lipsia e Berlino, 1912.
- [13] EULER L., *Problematis isoperimetrici in latissimo sensu accepti solutio generalis*, Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, vol. 6 (1732-33), 1738, pp. 123-155; in EULER, *Opera*, series I, vol. XXV, Berna, 1952, pp. 13-40.
- [14] EULER L., *De linea celerrimi descensus in medio quocunq̄ue resistente*, Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, vol. 7 (1734-5), 1740, pp. 135-149; in EULER, *Opera*, series I, vol. XXV, Berna, 1952, pp. 41-53.
- [15] EULER L., *Curvarum maximi minimive proprietate gaudentium inventio nova et facilis*, Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, vol. 8 (1736), 1741, pp. 159-190; in EULER, *Opera*, series I, vol. XXV, Berna, 1952, pp. 54-80.
- [16] EULER L., *Theoria motuum planetarum et cometarum*, Berolini, 1744; in EULER, *Opera*, series II, vol. XXVIII, Zurigo, 1959, pp. 105-251.
- [17] EULER L., *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*, Bousquet, Losanna e Ginevra, 1744; in EULER, *Opera*, series I, vol. XXIV, Berna, 1952.
- [18] EULER L., *Introductio in analysin infinitorum*, 2 voll., Bousquet, Losanna, 1748; in EULER, *Opera*, vol. 1°, series I, vol. VIII, Lipsia e Berlino, 1922; vol. 2°, series I, vol. IX, Ginevra, 1945.
- [19] EULER L., *Scientia navalis*, 2 voll., Academia Scientiarum, Petropoli, 1749; in EULER, *Opera*, parte 1^a, series II, vol. XVIII, Zurigo, 1967; parte 2^a, series II, vol. XIX, Basilea, 1972.
- [20] EULER L., *Recherches sur les plus grands et plus petits qui se trouvent dans les actions des forces*, Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, vol. 4 (1748), 1750, pp. 149-188; in EULER, *Opera*, series II, vol. V, Losanna, 1957, pp. 1-37.
- [21] EULER L., *Réflexions sur quelques loix générales de la nature qui s'observent dans les effets des forces quelconques*, Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, vol. 4 (1748), 1750, pp. 189-218; in EULER, *Opera*, series II, vol. V, Losanna, 1957, pp. 38-63.
- [22] EULER L., *Harmonie entre les principes généraux de repos et de mouvement de M. de Maupertuis*, Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, vol. 7 (1751), 1753, pp. 169-198; in EULER, *Opera*, series II, vol. V, Losanna, 1957, pp. 152-176.

- [23] EULER L., *Sur le principe de la moindre action*, Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, vol. 7 (1751), 1753, pp. 199-218; in EULER, *Opera*, series II, vol. V, Losanna, 1957, pp. 179-193.
- [24] EULER L., *Examen de la dissertation de M. le Professeur Koenig, insérée dans les actes de Leipzig, pour le mois de mars 1751*, Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, vol. 7 (1751), 1753, pp. 219-245; in EULER, *Opera*, series II, vol. V, Losanna, 1957, pp. 194-213.
- [25] EULER L., *Essai d'une démonstration métaphysique du principe général de l'équilibre*, Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, vol. 7 (1751), 1753, pp. 246-254; in EULER, *Opera*, series II, vol. V, Losanna, 1957, pp. 250-256.
- [26] EULER L., *Institutiones calculi differentialis cum eius usu in analysi finitorum ac doctrina serierum*, Academia Scientiarum, Petropoli, 1755; in EULER, *Opera*, series I, vol. X, Lipsia e Berlino, 1913.
- [27] EULER L., *Lettre de M. Euler a M. de La Grange. 1er Janvier 1760 (Recherches sur la propagation des ébranlements dans un milieu élastique)*, Mélanges de philosophie et de mathématique de la Société Royale de Turin, vol. 2 (1760-1761), 1762, 2^a parte, pp. 1-10; in EULER, *Opera*, series II, vol. X, Berna, 1947, pp. 255-263; in *Oeuvres de Lagrange publiées par J.-A. Serret*, vol. XIV, Paris, Gauthier-Villars, 1892, pp. 178-187.
- [28] EULER L., *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum ex primis nostrae cognitionis principiis stabilita et ad omnes motus qui in huiusmodi corpora cadere possunt accommodata*, 1^o vol., Rostochii et Gryphiswaldiae, 1765; in EULER, *Opera*, series II, vol. III, Berna, 1948.
- [29] EULER L., *Elementa calculi variationum*, Novi commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, vol. 10 (1764), 1766, pp. 51-93; in EULER, *Opera*, series I, vol. XXV, Berna, 1952, pp. 141-176.
- [30] EULER L., *Analytica explicatio methodi maximorum et minimorum*, Novi commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, vol. 10 (1764), 1766, pp. 94-134; in EULER, *Opera*, series I, vol. XXV, Berna, 1952, pp. 177-207.
- [31] EULER L., *Institutiones calculi integralis*, 3 voll., Academia Scientiarum, Petropoli, 1768-1770; in EULER, *Opera*, series I, Voll. XI-XIII, Lipsia e Berlino, 1913-1914.
- [32] EULER L., *Methodus nova et facilis calculum variationum tractandi*, Novi commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, vol. 16 (1771), 1772, pp. 35-70; in EULER, *Opera*, series I, vol. XXV, Berna, 1952, pp. 208-235.
- [33] EULER L., *Éléments d'algèbre*, 2 voll., Bruyset, Lyon, 1774; originale in tedesco: *Vollständige Anleitung zur Algebra*, Pietroburgo, 1770 in EULER, *Opera*, series I, vol. I, Lipsia e Berlino, 1911.

- [34] EULER L., *Commercium epistolicum*, EULER, *Opera*, series IV A, vol. V, *Correspondance de Leonhard Euler avec A.C. Clairaut, J. d'Alembert et J.L. Lagrange*, A. P. Juškevič et R. Taton (eds.), Birkhäuser Verlag, Basel, 1980.
- [35] FRASER C.G., *J.L. Lagrange's Early Contributions to the Principles and Methods of Mechanics*, *Archive for History of Exact Sciences*, 28 (1983), pp. 197-241.
- [36] FRASER C.G., *J.L. Lagrange's Changing Approach to the Foundations of the Calculus of Variations*, *Archive for History of Exact Sciences*, 32 (1985), pp. 151-191.
- [37] FRASER C.G., *Isoperimetric Problems in the Variational Calculus of Euler and Lagrange*, *Historia Mathematica*, 19 (1992), pp. 4-23.
- [38] FRASER C.G., *The Origins of Euler's Variational Calculus*, *Archive for History of Exact Sciences*, 47 (1994), pp. 103-141.
- [39] FRASER C.G., *The Calculus of Variations: A Historical Survey*, *History of Mathematics*, vol. 24, American Mathematical Society, Providence, 2003; pp. 355-383.
- [40] GALLETTO D., *La genesi della «Mécanique Analytique»*, in «Atti del Convegno “La Mécanique Analytique de Lagrange et son Heritage – Parte II”, Torino, 26-28 ottobre 1989», *Accademia delle Scienze*, Torino 1992; pp. 277-370.
- [41] GOLDSTINE H. H., *A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century*, Springer-Verlag, New York, 1980.
- [42] GRATAN-GUINNESS I., *A Paris curiosity. 1814: Delambre's obituary of Lagrange and its «supplement»*, in «Scienza e Filosofia, Saggi in onore di Ludovico Geymonat», C. Mangione (ed.), Garzanti, Milano, 1985, pp. 664-677.
- [43] LAGRANGE J.-L., *Recherches sur la méthode de maximis et minimis*, *Miscellanea philosophico-mathematica Societatis Privatae Taurinensis*, vol. I (1757-1759), 1759, 2^a parte, pp. 18-32; in *Oeuvres de Lagrange publiées par J.-A. Serret*, vol. I, Gauthier-Villars, Paris, 1867, pp. 3-20.
- [44] LAGRANGE J.-L., *Recherches sur la nature et la propagation du son*, *Miscellanea philosophico-mathematica Societatis Privatae Taurinensis*, vol. I (1757-1759), 1759, 3^a parte, pp. I-X e 1-112; in *Oeuvres de Lagrange publiées par J.-A. Serret*, vol. I, Paris, Gauthier-Villars, 1867, pp. 39-148.
- [45] LAGRANGE J.-L., *Nouvelles recherches sur la nature et la propagation du son*, *Mélanges de philosophie et de mathématique de la Société Royale de Turin*, vol. II (1760-1761), 1762, 2^a parte, pp. 11-172; in *Oeuvres de Lagrange publiées par J.-A. Serret*, vol. I, Paris, Gauthier-Villars, 1867, pp. 151-316.
- [46] LAGRANGE J.-L., *Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies*, *Mélanges de philosophie et de mathématique*

- que de la Société Royale de Turin, vol. II (1760-1761), 1762, 2^a parte, pp. 173-195; in *Oeuvres de Lagrange publiées par J.-A. Serret*, vol. I, Gauthier-Villars, Paris, 1867, pp. 335-362.
- [47] LAGRANGE J.-L., *Application de la méthode précédente à la solution de différens problèmes de dynamique*, Mélanges de philosophie et de mathématique de la Société Royale de Turin, vol. II (1760-1761), 1762, 2^a parte, pp. 196-298; in *Oeuvres de Lagrange publiées par J.-A. Serret*, vol. I, Gauthier-Villars, Paris, 1867, pp. 365-468.
- [48] LAGRANGE J.-L., *Addition à la première partie des recherches sur la nature et la propagation du son imprimées dans le volume précédent*, Mélanges de philosophie et de mathématique de la Société Royale de Turin, vol. II (1760-1761), 1762, 2^a parte, pp. 323-336; in *Oeuvres de Lagrange publiées par J.-A. Serret*, vol. I, Paris, Gauthier-Villars, 1867, pp. 319-332.
- [49] LAGRANGE J.-L., *Sur la méthode des variations*, Mélanges de philosophie et de mathématique de la Société Royale de Turin, vol. IV (1766-1769), 1773, 2^a parte, pp. 163-187; in *Oeuvres de Lagrange publiées par J.-A. Serret*, vol. II, Gauthier-Villars, Paris, 1868, pp. 37-63.
- [50] LAGRANGE J.-L., *Additions à l'analyse indéterminée*, Appendice a: Euler L., *Éléments d'algebre*, 2 voll., Bruyset, Lyon, 1774, vol. II, pp. 369-658; in *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, series I, vol. I, Lipsia e Berlino, 1911, pp. 499-651; II ed., Pietroburgo, 1798 in *Oeuvres de Lagrange publiées par J.-A. Serret*, vol. VII, Gauthier-Villars, Paris, 1877, pp. 5-180.
- [51] LAGRANGE J.-L., *Recherches sur la libration de la Lune, dans lesquelles on tâche de résoudre la question proposée par l'Académie Royale des Sciences, pour le Prix de l'année 1764*, Recueil Prix de l'Académie Royale des Sciences de Paris, vol. IX, Paris, 1777, Parte 1^a, pp. 1-50; in *Oeuvres de Lagrange publiées par J.-A. Serret*, vol. VI, Gauthier-Villars, Paris, 1873, pp. 5-61.
- [52] LAGRANGE J.-L., *Théorie de la libration de la Lune et des autres phénomènes qui dépendent de la figure non sphérique de cette planète*, Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belle-Lettres de Berlin, année 1780, Berlin, 1782, 2^a Parte, pp. 203-309; in *Oeuvres de Lagrange publiées par J.-A. Serret*, vol. V, Gauthier-Villars, Paris, 1870, pp. 5-122.
- [53] LAGRANGE J.-L., *Mécanique analitique*, 1^a ed., Desaint, Paris, 1788.
- [54] LAGRANGE J.-L., *Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissans, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies*, Imprimerie de la République, Paris, 1797; IV ed. (1813) in *Oeuvres de Lagrange publiées par J.-A. Serret*, vol. IX, Gauthier-Villars, Paris, 1881.
- [55] LAGRANGE J.-L., *Leçons sur le calcul des fonctions*, 2^a ed., Courcier, Paris, 1806; in *Oeuvres de Lagrange publiées par J.-A. Serret*, vol. X, Gauthier-Villars, Paris, 1884.

- [56] LAGRANGE J.-L., *Mécanique analytique*, 2^a ed., Courcier, Paris, 1811-1815; 3^a ed., Mallet-Bachelier, Paris, 1853-1855 in *Oeuvres de Lagrange publiées par J.-A. Serret et G. Darboux*, Voll. XI-XII, Gauthier-Villars, Paris, 1888-1889.
- [57] MACH E., *La meccanica nel suo sviluppo storico-critico*, Bollati Boringhieri, Torino, 1977.
- [58] MAUPERTUIS P.-L. M. de, *Loi du repos des corps*, Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, 1740, pp. 170-176; in *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, series II, vol. V, Losanna, 1957, pp. 268-273.
- [59] MAUPERTUIS P.-L. M. de, *Accord de différentes loix de la nature, qui avaient jusqu'ici paru incompatibles*, Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, 1744, pp. 417-426; in EULER, *Opera*, series II, vol. V, Losanna, 1957, pp. 274-281.
- [60] MAUPERTUIS P.-L. M. de, *Les loix du mouvement et du repos déduites d'un principe métaphysique*, Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, 1746, pp. 267-294; in EULER, *Opera*, series II, vol. V, Losanna, 1957; pp. 282-302.
- [61] NEWTON I., *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, 1687; *Mathematical Principles of Natural Philosophy and his System of the World*, 2 voll., University of California Press, Berkeley, 1934.
- [62] TATON R., *Les relations d'Euler avec Lagrange*, in «Leonhard Euler 1707-1783», Birkhäuser Verlag, Basel, 1983, pp. 409-420.
- [63] WOLFF C., *Elementa matheseos universae*, 5 voll., Halle, Magdeburgo, 1713-1741.