Euler e i fondamenti dell'Analisi

SILVIA MAZZONE*

Il calcolo differenziale è nato alla fine del '600 come un algoritmo analitico per lo studio delle curve ed il suo oggetto erano le variabili, correlate alle curve, che si incontrano in ambito geometrico. All'epoca una curva era usualmente rappresentata con una equazione del tipo $F(x,y) = 0$ in cui, in linea di principio, nessuna variabile aveva un ruolo privilegiato e l'operazione fondamentale del calcolo leibniziano era la differenziazione delle variabili, che venivano trattate alla stessa stregua. Solo più tardi il calcolo si è mutato in calcolo sulle funzioni e su questa trasformazione Euler ha lasciato una impronta indelebile con la sua scelta di edificare su basi algebriche l'analisi infinitesimale[1], ponendo al centro della teoria il concetto di funzione[2].

Se analizziamo le ricerche pubblicate sulle più importanti riviste dell'epoca, dagli *Acta Eruditorum* ai *Mémoires* dell'Accademia di Parigi, dai *Commentarii Petropolitani*, ai *Mémoires* dell'Accademia di Berlino, vediamo che, a grandi linee, è possibile dividere la storia dello sviluppo del Calcolo nel Settecento in due periodi: un periodo iniziale in cui ancora predominano concezioni e metodi geometrici e un secondo periodo, più lungo, in cui si sviluppa e si afferma una impostazione algebrico-analitica che culmina, a fine secolo, con l'opera di Lagrange.

Una chiara esemplificazione del pensiero di Euler sui fondamenti algebrici del calcolo si trova nei suoi studi sulla differenziabilità delle funzioni di più variabili.

---

* Sapienza Università di Roma.

[1] Sugli aspetti algebrici dell'approccio di Euler e Lagrange al calcolo differenziale e integrale cfr. C.G. FRASER, *The calculus as algebraic analysis: some observations on mathematical analysis in the 18th century*, AHES, 39, 1989, pp. 317-335.

[2] Sul contributo di Euler all'evoluzione del concetto di funzione cfr. A.P. YOUSCHKEVITCH, *The concept of function up to the middle of the19th century*, AHES, 16, 1976/77, pp. 37-85 e J. DHOMBRES, *Quelques aspects de l'histoire des équations fonctionnelles liés à l'evolution du concept de fonction*, AHES, 36, 1986, pp. 91-181.

Il calcolo per funzioni di più variabili era assente nelle prime ricerche dei pionieri ed è nato, alla fine del ’600, dagli studi sulle famiglie di curve.[3] Infatti, assegnata una curva nella forma *F (x,y)* = 0, il metodo leibniziano per determinarne l’equazione differenziale consisteva nel differenziare l’equazione data in base alle regole di differenziazione, ottenendo così una equazione del tipo $A(x,y)dx + B(x,y)dy = 0$. La coincidenza del primo membro di questa equazione col differenziale totale di una funzione di due variabili è, tuttavia, solo formale in quanto nella differenziazione effettuata, le variabili variano contemporaneamente ma non indipendentemente, essendo esse legate dall’equazione della curva.

Negli anni ’90 del Seicento il modello della situazione con due variabili indipendenti fu principalmente fornito dalle equazioni delle famiglie di curve dipendenti da un parametro ed il problema che richiese la considerazione e lo sviluppo di un calcolo per funzioni di più variabili indipendenti fu quello della determinazione delle traiettorie ortogonali ad una famiglia di curve. Pertanto la differenziazione parziale fu introdotta per equazioni del tipo $F(x,y,a)=0$ rispetto alle variabili indipendenti *x*, variabile spaziale, e *a* parametro o modulo della curva, come si diceva all’epoca. Per questo motivo la differenziazione rispetto ad *a*, pensando *x* costante, veniva detta “differenziazione di curva in curva”. In questo tipo di ricerche avevano impegnate molte energie Leibniz[4], Johann, Nicolaus I e Nicolaus II Bernoulli[5] ed anche Euler, a Basilea, si era applicato a studi di questo genere, tanto che a soli venti anni aveva pubblicato sugli *Acta Eruditorum* un lavoro sulle traiettorie reciproche algebriche[6]. Lasciata la Svizzera, Euler aveva proseguito queste

---

[3] Per uno studio approfondito su questo tema cfr. S.B. ENGELSMAN, *Families of curves and the origin of partial differentiation*, Amsterdam, 1984.

[4] G.W. LEIBNIZ, *De linea ex lineis numero infinitis ordinatim ductis inter se concurrentibus formata easque omnes tangente, ac de novo in ea re analysis infinitorum usu*, AE, Aprilis 1692, pp. 168-171; *Nova calculi differentialis applicatio et usus ad multiplicem linearum constructionem ex data tangentium conditione*, AE, Julii 1694, pp. 311-316.

[5] Joh. BERNOULLI, *Curvatura radii in diaphanis non uniformibus …*, AE, Maji 1697, pp. 206-211, Joh. B., *Opera*, I, pp. 187-193. Nic. I BERNOULLI, *Tentamen solutionis generalis problematis de construenda curva quae alias ordinatim positione datas ad angulos rectos secat*, AE, Junii 1719, pp. 295-304, Joh. B., *Opera*, II, pp. 305-314. Nic. II BERNOULLI, *Problema: data serie linearum per rectae in eadem linea constantis variationem prodeunte, invenire aliam seriem linearum, quarum quaevis priores omnes ad angulos rectos secet*, AE, Maji 1716, pp. 226-230, Joh. B., *Opera*, II, pp. 270-272; *De trajectoriis curvas ordinatim positione datas ad angulos rectos vel alia data lege secantibus*, AE, Junii 1718, pp. 248-262, Joh. B., *Opera*, II, pp. 286-298; *Exercitatio geometrica de trajectoriis ortogonalibus, continens varias earum tum inveniendarum tum construendarum methodos*, …, *Sectio I*, AE, Maii 1720, pp. 223-237; *Sectio II*, AE Suppl. 7, 1721, pp. 303-326; *Sectio III*, AE, Suppl. 7, 1721, pp. 337-353, Joh. B., *Opera*, II, pp. 423-472.

[6] L. EULER, *Methodus inveniendi trajectorias reciprocas algebraicas*, AE, Septembris 1727, pp. 408-412, EULER, *Opera*, series I, vol. 26, pp. 1-5.

ricerche a San Pietroburgo, dove aveva fra l'altro come collega Jacob Hermann, che su tali argomenti aveva lavorato a lungo[7]. Indipendentemente, verso la fine degli anni '30, studi sulla differenziazione parziale si sono sviluppati in Francia in connessione con il problema dell'integrazione delle equazioni differenziali esatte e della determinazione di opportuni fattori integranti.

Importanti testimonianze del lavoro di Euler sulle funzioni di più variabili sono due articoli presentati all'Accademia di San Pietroburgo nel 1734 e poi pubblicati solo nel 1740[8]. Ai nostri scopi però, risulta di maggior interesse il manoscritto *De differentiatione functionum duas pluresve variabiles quantitates involventium*, composto intorno al 1730 ed attualmente conservato negli Archivi dell'Accademia Russa delle Scienze. Esso è indicato con H20 nell'indice dei manoscritti di Euler pubblicato da Eneström nel 1913[9], ed è inserito col n. 86 nel catalogo delle carte di Euler redatto da Kopelevic ed altri nel 1962[10]. In questo manoscritto, pubblicato da Steven B. Engelsman nel 1984[11], Euler fornisce, tra l'altro, la sua dimostrazione del teorema sull'uguaglianza dei differenziali secondi misti, già noto a Nicolaus I Bernoulli che lo aveva osservato nel 1718-1719[12], ed il suo famoso teorema sul differenziale delle funzioni omogenee.

Secondo uno schema che diverrà usuale nelle opere di Euler, il manoscritto è organizzato in due parti. La prima parte è teorica ed oltre ai già ricordati teoremi sull'uguaglianza dei differenziali secondi misti e sul differenziale totale delle funzioni omogenee di grado *n*, contiene il teorema di derivazione sotto il segno di integrale per gli integrali dipendenti da un parametro. La seconda parte invece, espone l'uso della teoria presentata in vari

---

[7] J. HERMANN, *Schediasma de trajectoriis datae seriei curvis ad angulos rectibus occurrentibus* …, AE, Augusti 1717, pp. 348-352, Joh. B., *Opera*, II, pp. 275-279; *Supplementum solutionis suae problematis de trajectoriis curvarum inveniendis* …, AE, Julii 1718, pp. 68-77, Joh. B., *Opera*, II, pp. 279-281; *Additamentum ad schedas super problema trajectoriarum* …, AE, Februarii 1719, pp. 68-77, Joh. B., *Opera*, II, pp. 299-305.

[8] L. EULER, *De infinitis curvis eiusdem generis seu methodus inveniendi aequationes pro infinitis curvis eiusdem generis*, CP, VII, 1734-35 (1740), pp. 174-183, EULER, *Opera*, series I, vol. 22, pp. 36-56; *Additamentum ad dissertationem de infinitis curvis ejusdem generis*, CP, VII, 1734-35 (1740), pp. 184-200, EULER, *Opera*, series I, vol. 22, pp. 57-75.

[9] G. ENESTRÖM, *Bericht an die Eulerkommission der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft über die Eulerschen Manuskripte der Petersburger Akademie*, Jahresbericht DMV, 22, 1913, pp. 191-205 (paginazione corsiva).

[10] Ju. Kh. KOPELEVIC ed altri, *Rukopisnye materialy L. Eilera w arkhiwe Akademii Nauk SSSR*, Moscow-Leningrad, 1962.

[11] S.B. ENGELSMAN, *Families of curves*…, cit., pp. 205-213.

[12] Nic. I BERNOULLI, *Demonstratio analytica constructionis curvarum quae alias positione datas ad angulos rectos secant traditae in Actis Lips. 1719, pag. 295 et seqq.*, in S.B. ENGELSMAN, *Families of curves*…, cit., pp. 200-201.

problemi di traiettorie che intersecano in modo assegnato famiglie di curve. Questa separazione tra teoria e applicazione è molto importante per il progresso della matematica. Infatti, diversamente da quanto avevano fatto i suoi predecessori che avevano introdotto la differenziazione parziale all'interno degli studi sulle famiglie di curve come uno strumento specificatamente utile per la risoluzione di quel tipo di problemi, Euler presenta una esposizione teorica generale basata sul concetto di funzione di due variabili, chiaramente distinta dalle successive applicazioni.

La trattazione del teorema sull'eguaglianza dei differenziali secondi misti mostra molto bene come Euler usi i procedimenti algebrici per dare attendibilità alle sue argomentazioni differenziali. Dopo aver enunciato il Principio

> Si quantitas ex duabus variabilibus composita bis differentietur, altera variabilium in prima differentiatione altera in secunda tanquam constante tractata, id quod duobus modis fieri potest: erunt, quae in utroque casu proveniunt inter se aequalia[13].

Euler procede a convalidare il suo asserto con tre argomentazioni diverse.

Dapprima verifica l'enunciato su un esempio ed afferma che la verità del Principio in generale può essere colta mettendolo alla prova in tanti casi diversi. Questo tipo di spiegazione all'epoca non era inusuale: si riteneva cioè che un ragionamento valido in numerosi esempi potesse essere adattato ad ogni altro esempio si fosse considerato.

Successivamente, per coloro che non riuscivano a cogliere la verità della prima spiegazione, Euler presenta la seguente dimostrazione di stile leibniziano, che usa la differenziazione di curva in curva.

In una famiglia di curve dipendenti da un parametro egli considera la curva (Fig. 1) AM riferita all'asse AB, che si ottiene dal valore a del parametro. Posto $\mathrm{AB} = x$, e $\mathrm{BM} = y$, si avrà $y = P(x, a)$.

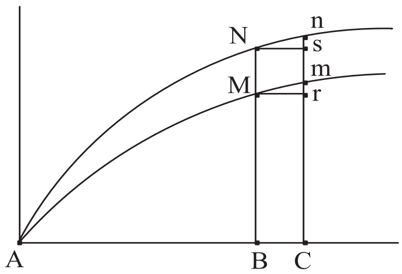


Fig. 1

[13] S.B. ENGELSMAN, *Families of curves* …, cit., p. 205.

Considera poi, nella stessa famiglia, una curva AN infinitamente prossima ad AM, nel senso che essa si ottiene dando al parametro il valore $a + da$ e procede a costruire i differenziali secondi misti $d_a d_x P$ e $d_x d_a P$ e a mostrare che essi coincidono.

Per differenziare *P* rispetto ad x sulla curva AM, cioè dando al parametro il valore fisso a, egli considera il punto C tale che $\mathrm{AC} = x + dx$, ed ottiene che il differenziale dell'ordinata è

$$d_x^a P = P(x + dx, a) - P(x, a) = \mathrm{mr}\,.$$

Per differenziare *P* rispetto ad *x* sulla curva AN, cioè dando al parametro il valore $a + da$, egli considera lo stesso incremento *dx* di *x* e trova $d_x^{a+da} P = P(x + dx, a + da) - P(x, a + da) = \mathrm{ns}$. Pertanto

$$d_a d_x P = \mathrm{ns} - \mathrm{mr}\,.$$

Euler esegue ora le differenziazioni in ordine inverso: egli pensa *a* variabile ed *x* costante cioè valuta l'incremento della *P* tra AM e AN in corrispondenza della stessa ascissa *x* e trae $d_a^x P = \mathrm{NM}$ che diviene $d_a^{x+dx} P = \mathrm{nm}$ se valutato in corrispondenza del punto *x*+*dx*. Dunque

$$d_x d_a P = \mathrm{nm} - \mathrm{NM}.$$

Ma $\mathrm{ns} = \mathrm{nr} - \mathrm{sr}$ e $\mathrm{mr} = \mathrm{nr} - \mathrm{nm}$, pertanto

$$d_a d_x P = \mathrm{ns} - \mathrm{mr} = \mathrm{nr} - \mathrm{sr} - \mathrm{nr} + \mathrm{nm} = \mathrm{nm} - \mathrm{sr} = \mathrm{nm} - \mathrm{NM} = d_x d_a P$$

e i due differenziali coincidono.

Passiamo alla seconda dimostrazione. Per introdurla Euler fa la seguente (e per noi molto interessante) considerazione in cui definisce la dimostrazione geometrica appena presentata derivata da principi eterogenei, mentre quella che si accinge ad offrire al lettore sarà ottenuta dalla stessa essenza della differenziazione:

> Quia autem haec demonstratio ex aliena fonte est petita, aliam ex ipsius differentiationis natura derivabo[14].

Questa nuova dimostrazione è certamente giudicata da Euler la vera dimostrazione del Principio dal momento che essa sarà pubblicata nel 1740 sui

[14] S.B. ENGELSMAN, *Families of curves …*, cit., p. 206.

Commentarii Petropolitani[15] e riedita nel 1755 nel trattato di calcolo differenziale[16].

Ecco come procede. Euler considera la quantità $P = P(x,a)$ ed osserva che se in P si sostituisce $x+dx$ in luogo di x si ottiene $Q = P(x + dx, a)$, se invece si sostituisce $a+da$ in luogo di a si trova $R = P(x,a + da)$. Se poi si sostituisce $x+dx$ in luogo di x e $a+da$ in luogo di a, P si muta in $S = P(x+dx, a+da)$ che è lo stesso che si ottiene ponendo $(a+da)$ al posto di a in Q o ponendo $(x+dx)$ al posto di x in R.

Egli differenzia poi P rispetto ad x, considerando a costante, ed ottiene

$$d_x P = P(x+dx,a) - P(x,a) = Q - P;$$

pertanto differenziando $d_x P$ rispetto ad a, mantenendo x costante, trova

$$d_a d_x = P(x+dx,a+da) - P(x+dx,a) - (P(x,a+da) - P(x,a)) = \\ = S - Q - R + P.$$

Cambiando l'ordine delle differenziazioni ottiene invece

$$d_a P = P(x,a+da) - P(x,a) = R - P$$

da cui deduce

$$d_x d_a P = P(x+dx,a+da) - P(x,a+da) - (P(x+dx,a) - P(x,a)) = \\ = S - R - Q + P$$

e dunque

$$d_x d_a P = d_a d_x P.$$

Per avere il risultato in una forma più maneggevole Euler conclude osservando che, data in generale una funzione di due variabili $P = P(x,y)$ (si noti l'indicazione delle variabili!) tale che $dP = Qdx + Rdy$, e posto $dQ = Kdx + Ldy$ e $dR = Mdx + Ndy$, in forza del Principio precedente deve aversi

$$\begin{array}{ccccc} d_y d_x P & = & d_x d_y P & & \\ \| & & \| & & \\ Ldydx & & Mdxdy & \Rightarrow & L = M \end{array}$$

[15] L. EULER, *De infinitis curvis eiusdem generis …*, CP, VII, 1734-35 (1740), pp. 177-178, EULER, *Opera*, series I, vol. 22, pp. 38-39.

[16] L. EULER, *Institutiones calculi differentialis cum ejus usu in analysi finitorum ac doctrina serierum*, Petropoli, 1755, pp. 155-156, EULER, *Opera*, series I, vol. 10, pp. 153-154.

Una dimostrazione di questo genere, se giudicata coi nostri criteri, risulta insoddisfacente anche se riconosciamo alcune felici intuizioni, come la considerazione dei quattro punti individuati da incrementi paralleli agli assi coordinati e dei relativi incrementi della funzione, da cui parte anche la dimostrazione moderna dello stesso teorema.

Una prima osservazione critica che possiamo fare è che Euler definisce l'uguaglianza dei differenziali secondi misti un principio, nel senso che ritiene il risultato sempre valido e non crede di dover ricercare possibili eccezioni al suo ragionamento. Anche quando procede ad ottenere l'uguaglianza dei coefficienti differenziali secondi misti L e M della funzione P egli considera, senza metterne minimamente in dubbio la esistenza, sia il differenziale $dP = Qdx + Rdy$ sia i differenziali dQ e dR, e ciò, come noi ben sappiamo, non è sempre vero. A questo riguardo bisogna dire che il punto di vista di Euler era globale e il suo sforzo era tutto teso a fare delle nuove scoperte, individuando proprietà delle funzioni che fossero largamente valide. Pertanto egli era portato a sottovalutare eventuali difficoltà che si potevano presentare per particolari funzioni, in particolari valori delle variabili, a vantaggio della individuazione di proprietà generali delle funzioni in esame.

Una seconda osservazione riguarda la dimostrazione in sé. Possiamo chiederci: se Euler definisce la dimostrazione basata sulla considerazione di una famiglia di curve e sulla differenziazione di curva in curva tratta da una fonte eterogenea, quale è la natura della seconda dimostrazione che coincide con la natura stessa del calcolo differenziale? La risposta appare evidente. La prima dimostrazione è chiaramente di natura geometrica; esaminiamo la seconda. Il ragionamento di Euler consiste unicamente nell'osservare con le regole dell'algebra l'uguaglianza dei due incrementi parziali secondi misti considerati e nel trasferire ai differenziali l'uguaglianza, dimostrata in realtà solo al finito, degli incrementi. Pertanto, secondo Euler, il calcolo è un fatto di funzioni, di variabili e di differenze sia di funzioni che di variabili e la dimostrazione dichiarata interna alla natura del calcolo consiste in una verifica, puramente algebrica, dell'eguaglianza di due espressioni. Quindi la natura del calcolo è algebrica e sono le immutabili e certe regole dell'algebra quelle che pongono il timbro di validità ai ragionamenti infinitesimali.

Fin dal suo primo soggiorno a San Pietroburgo, Euler aveva concepito un progetto globale di esposizione sistematica del calcolo differenziale e integrale, secondo principi che comportavano una completa riorganizzazione della trattazione. Questo progetto è attestato da un interessante manoscritto, purtroppo incompleto, senza data e senza titolo, indicato con

H26 nell'indice di Eneström[17], ed inserito col n. 92 e con il titolo *Index Capitum tractatus cujusdam majoris de analysi infinitorum*, nel catalogo delle carte di Euler conservate all'Accademia Russa delle Scienze, redatto nel 1962[18]. Tale manoscritto è stato pubblicato, sia pure con una inversione rispetto all'ordine corretto delle pagine, da Andreas Speiser nel volume n. 29 dell'*Opera omnia* di Euler[19] ed è riconducibile al 1740: pertanto esso fu composto prima del trasferimento a Berlino nel giugno 1741 e risulta precedente alla stesura dei grandi trattati euleriani.

L'*Index* dimostra che Euler riteneva che tutta l'Analisi degli infiniti dovesse essere esposta in un'opera monumentale divisa in 6 libri: ogni libro era organizzato in due sezioni, rispettivamente dedicate la prima ai risultati teorici e la seconda alle applicazioni geometriche. Ogni sezione era a sua volta costituita da numerosi capitoli, di ciascuno dei quali è fornito un breve riassunto. Come si è già osservato, questa organizzazione è molto interessante per l'intento di creare una trattazione teorica generale, concettualmente indipendente e basata sul concetto di funzione, chiaramente distinta dalle successive applicazioni.

Il primo libro era dedicato al calcolo differenziale, ma il suo sommario è in massima parte mancante: abbiamo solo l'elencazione di alcune applicazioni del calcolo per funzioni di più variabili che avrebbero dovuto essere esposte nei capitoli 8-11 della sezione seconda. Si tratta dei metodi per la determinazione di piani tangenti e rette normali e per lo studio delle curve tracciate su una superficie, dei quali Euler giustamente rivendica l'originalità:

> Atque his quatuor capitibus continetur applicatio calculi differentialis ad superficies, quae adhuc a nemine est tradita[20],

dal momento che, come abbiamo visto, negli anni '30 del Settecento egli aveva maturato il concetto formale di funzione di più variabili ed aveva sviluppato per esse un calcolo appropriato.

Il libro 2 riguardava l'integrazione delle funzioni di una variabile con applicazione a problemi di rettificazioni, quadrature e calcolo di volumi. I libri 3 e 4 trattavano le equazioni differenziali ordinarie e le cosiddette equazioni modulari che sono particolari equazioni alle derivate parziali utilizzate da Euler per risolvere problemi relativi a famiglie di curve; tra

[17] Cfr. nota 9.

[18] Cfr. nota 10.

[19] L. EULER, *[Übersicht über ein Lehrbuch der gesamten Analysis]*, EULER, *Opera*, series I, vol. 19, pp. XXXI-XXXVIII.

[20] *Ibidem*, p. XXXI.

le numerose applicazioni troviamo lo studio delle geodetiche su una superficie e delle traiettorie che tagliano secondo un angolo dato una famiglia di curve. Il libro 5 era dedicato ai metodi specifici sviluppati per affrontare i problemi di calcolo delle variazioni ed infine il libro 6 illustrava l'uso dei metodi precedentemente esposti nella teoria delle serie e nello studio delle curve generate con il moto rotatorio, reptorio o trattorio.

Si trattava dunque di un progetto veramente importante ed impegnativo dal momento che, come scrive lo stesso autore nella conclusione del manoscritto, egli intendeva fornire una completa rassegna di tutti i risultati fino ad allora ottenuti dagli analisti che potesse risultare utile anche per le applicazioni:

> Haec ergo sunt capita, quibus tota Analysis infinitorum eo, ad quod hoc tempore evecta est, perfectionis fastigio includi posse mihi videtur. Necque enim quicquam adhuc reperire potui, quod non ad quodpiam horum capitum referri posset. Quocirca opus foret summae utilitatis, si quis hanc matheseos praecipuam partem ordine hic praescripto perspicue explicaret, quo tandem tot et tam ingentia impedimenta, quae plurimos ad interiora Matheseos penetrare volentes absterruerunt et repulerunt, ad eximium reliquarum etiam scientiarum incrementum tollantur[21].

Non deve stupire un progetto così grandioso in rapporto alla ancor giovane età del suo autore, dal momento che, come spesso accade ai matematici, Euler concepì nei suoi anni giovanili molte delle le intuizioni originali e dei programmi che svilupperà in seguito.

Trasferito a Berlino, Euler potenzia e parzialmente modifica le sue idee e procede alla stesura e alla pubblicazione di un'opera sul calcolo delle variazioni, *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*[22], cui aveva già iniziato a lavorare a San Pietroburgo e che costituiva, quasi con lo stesso titolo, la *Sectio secunda* del *Liber quintus* dell'*Index Capitum* di cui abbiamo appena parlato.

Allo stesso tempo, seguitando a riflettere sul progetto del grande trattato, egli matura la convinzione che alla base delle procedure infinitesimali ci siano dei concetti e dei metodi propedeutici, che definisce di analisi algebrica, la cui conoscenza è essenziale per una corretta

---

[21] *Ibidem*, p. XXXVI.

[22] L. EULER, *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*, Lausannae et Genevae, 1744, EULER, *Opera*, series I, vol. 24.

comprensione dell'analisi infinitesimale. Poiché a suo giudizio tali argomenti non si trovavano convenientemente esposti in letteratura, si dedica alla stesura dell'*Introductio in analysin infinitorum*, messa a punto tra il 1743 e il 1744 e poi pubblicata nel 1748, il cui scopo è esattamente quello di fornire al lettore tutti i preliminari algebrici necessari per affrontare lo studio del calcolo[23]. Così infatti scrive nella *Praefatio*:

> Non solum enim operam dedi, ut eas res, quas Analysis infinitorum absolute requirit, uberius atque distinctius exponerem, quam vulgo fieri solet, sed etiam satis multas quaestiones enodavi, quibus lectores sensim et quasi praeter expectationem ideam infiniti sibi familiarem reddent[24].

e al suo amico Christian Goldbach ribadisce:

> Ich habe inzwischen ein neues Werk dahin geschickt unter dem Titul *Introductio ad analysin infinitorum*, worin ich sowohl den partem sublimiorem der Algeber als der Geometrie abgehandelt und eine grosse Menge schwerer problematum ohne den calculum infinitesimalem resolvirt, wovon fast nichts anderswo anzutreffen. Nachdem ich mir einen Plan von einem vollständigen Tractat über die analysis infinitorum formirt hatte, so habe ich bemerkt, dass sehr viele Sachen, welche dazu eigentlich nicht gehören, und nirgend abgehandelt gefunden werden, vorhergehen müssten, und aus denselben ist dieses Werk als prodromus ad analysin infinitorum entstanden[25].

L'esame dell'*Introductio* mostra chiaramente la presenza del progetto complessivo di esposizione del calcolo testimoniato dall'*Index*, infatti già nelle prime pagine vengono affrontate questioni che saranno utili nei successivi trattati di calcolo differenziale e integrale. Inoltre, in accordo con la strategia indicata nel progetto del grande trattato, l'*Introductio* è divisa in due parti: la prima riguarda l'analisi algebrica pura, la seconda le applicazioni alla geometria. Come abbiamo già detto, questa impostazione che privilegia gli aspetti teorici, algebrici e algoritmici, rispetto

---

[23] L. EULER, *Introductio in analysin infinitorum*, 2 voll., Lausannae, 1748, EULER, *Opera*, series I, voll. 8 e 9.

[24] L. EULER, *Introductio…*, vol. 1, cit., pp. VII-VIII, EULER, *Opera*, series I, vol. 8, p. 7.

[25] L. EULER a C. GOLDBACH, Berlin, 4.7.1744, in P.H. FUSS, *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII.ème siècle*, St. Pétersbourg, 1843, p. 292. Nel frattempo ho inviato [a Losanna] una nuova Opera intitolata Introductio ad analysin infinitorum, in cui, senza il calcolo infinitesimale, tratto le questioni più sublimi di Algebra e Geometria e risolvo un gran numero di difficili problemi, dei quali quasi nulla si può trovare altrove. Dopo aver elaborato il Piano di un Trattato completo di analisi infinitesimale, mi sono accorto che molte questioni che in realtà non vi rientrano e non sono esposte altrove, debbono essere trattate prima e in tal senso quest'Opera si presenta come un precursore dell'analisi infinitesimale.

a quelli geometrici che sono all'origine dei metodi infinitesimali, è originale e l'autore ne rivendica la paternità nell'introduzione del trattato:

> Interim tamen pleraeque quaestiones, quae alibi quoque solutae reperiuntur, hic solutiones ex aliis principiis sunt nactae, ita ut non exiguam partem mihi vindicare possem[26].

Del resto l'assoluta mancanza di figure nel primo volume dell'*Introductio* è la più evidente testimonianza dell'intento di degeometrizzare la presentazione della materia.

Uno dei grandi meriti di Euler consiste nell'aver stabilito il principio che l'analisi matematica, è lo studio puramente analitico delle funzioni e questo principio rimarrà costante nella sua opera e sarà ereditato dai suoi successori. Egli stesso afferma:

> cum universa Analysis infinitorum circa quantitates variabiles earumque functiones versetur, hoc argumentum de functionibus in primis fusius exposui[27].

La definizione di funzione, invece, subisce una progressiva evoluzione nel suo pensiero, in accordo con la sua maturazione come ricercatore. Nella *Introductio*, dopo aver definito costanti le quantità che assumono sempre lo stesso valore, e variabili le quantità che possono assumere qualunque valore reale o complesso:

> Quantitas ergo variabilis in se complectitur omnes prorsus numeros, tam affirmativos quam negativos, tam integros quam fractos, tam rationales quam irrationales et transcendentes. Quin etiam cyphra et numeri imaginarii a significato quantitatis variabilis non excluduntur[28].

egli definisce una funzione come una arbitraria espressione analitica fra costanti ed una o più variabili:

> Functio quantitatis variabilis, est espressio analytica quomodocunque composita ex illa quantitate variabili, et numeris seu quantitatibus constantibus[29].
>
> Functio ergo duarum pluriumve quantitatum variabilium, x, y, z est espressio quomodocunque ex his quantitatibus composita[30].

---

[26] L. EULER, *Introductio…*, vol. 1, cit., p. XIII, EULER, *Opera*, series I, vol. 8, p. 11.

[27] L. EULER, *Introductio…*, vol. 1, cit., p. VIII, EULER, *Opera*, series I, vol. 8, p. 8.

[28] L. EULER, *Introductio…*, vol. 1, cit., p. 4, EULER, *Opera*, series I, vol. 8, p. 18.

[29] *Ibidem.*

[30] L. EULER, *Introductio…*, vol. 1, cit., p. 60, EULER, *Opera*, series I, vol. 8, p. 91.

In queste definizioni è del tutto assente ogni riferimento fisico all'idea del moto, che era stata al centro della ricerca newtoniana, e si evidenzia una continuità con la tradizione leibniziana la cui straordinaria fecondità era già stata ampiamente dimostrata, agli inizi del Settecento, dagli studi di Jacob e Johann Bernoulli. Inoltre è di assoluto rilievo il fatto che fin dalle prime pagine del suo trattato Euler introduca, accanto alle funzioni di variabile reale, quelle di variabile complessa di cui, come vedremo, si accinge a dare una nuova teoria: infatti le proprietà delle funzioni elementari nel campo complesso sono spesso molto diverse da quelle nel campo reale.

Col termine espressione analitica Euler intende una espressione in cui numeri e quantità variabili sono composti tra loro tramite operazioni sia algebriche che trascendenti. Tra le operazioni che definiscono funzioni algebriche egli inserisce, oltre alle usuali operazioni, la risoluzione delle equazioni algebriche, mentre tra le operazioni che danno luogo a funzioni trascendenti considera, oltre all'esponenziale e al logaritmo, tutte le operazioni di calcolo integrale che forniscono la risoluzione delle equazioni differenziali:

> Praecipuum functionum discrimen in modo compositionis, quo ex quantitate variabili et quantitatibus constantibus formantur, positum est. Pendet ergo ab operationibus, quibus quantitates inter se componi et permisceri possunt; quae operationes sunt additio et subtractio, multiplicatio et divisio, evectio ad potestates et radicum extractio, quo etiam resolutio aequationum est referenda. Praeter has operationes, quae algebraicae vocari solent, dantur complures aliae trascendentes, ut exponentiales, logarithmicae atque innumerabiles aliae, quas calculus integralis suppeditat[31].

Tutto ciò in completo accordo con la dottrina leibniziana che accettava, per la rappresentazione delle curve, sia le equazioni algebriche che le equazioni differenziali[32].

La prima parte dell'*Introductio* è dedicata ad un dettagliato studio sistematico delle funzioni elementari, che rimarrà basilare per tutte le successive trattazioni.

Le funzioni algebriche sono divise in due classi: le funzioni razionali, a loro volta distinte in razionali intere e razionali fratte, e le funzioni irrazionali. Tra gli esempi di funzioni trascendenti, oltre all'esponenziale e al logaritmo, troviamo le funzioni trigonometriche. Euler distingue le funzioni in pari e dispari, uniformi (univoche, nell'attuale terminologia) e multiformi (multi-

---

[31] L. EULER, *Introductio…*, vol. 1, cit., p. 5, EULER, *Opera*, series I, vol. 8, p. 19.

[32] Sull'importanza della tradizione leibniziana nel Settecento cfr. S. MAZZONE, C.S. ROERO, *La tradizione leibniziana e i contributi di Euler e di Lagrange* in *Storia della Scienza*, vol. VI *L'età dei lumi*, Roma, Istituto della Enciclopedia Italiana, 2002, pp. 388-414.

voche) e osserva che esistono anche funzioni, come ad esempio l'arco il cui seno è z, che assumono infiniti valori. Distingue inoltre le funzioni in esplicite e implicite e a questo riguardo formula teoremi sull'esistenza della funzione inversa. Infine introduce le funzioni omogenee di due variabili e ne discute le proprietà. In particolare osserva che le funzioni omogenee di grado zero sono costanti sulle semirette uscenti dall'origine.

Riguardo alla rappresentazione delle funzioni Euler mostra come una stessa funzione possa essere espressa da formule analitiche diverse.

Un primo enunciato importante riguarda la fattorizzazione di un polinomio a coefficienti reali in fattori reali semplici di primo e di secondo grado, a seconda che le sue radici siano reali o complesse[33]. Euler è conscio di non aver rigorosamente dimostrato questo risultato ma ritiene di averlo giustificato senza aver lasciato adito ad alcun dubbio:

> Quanquam autem eundem demonstrandi modum ad altiores potestates extendere non licet, tamen extra dubium videtur esse positum eandem proprietatem in quotcunque factores imaginarios competere; [...]. Hinc omnis functio integra ipsius z resolvi poterit in factores reales vel simplices vel duplices. Quod quamvis non summo rigore sit demonstratum, tamen ejus veritas in sequentibus magis corroborabitur, ubi hujus generis functiones $a+bz^n$, $a+bz^n+cz^{2n}$ $a+bz^n+cz^{2n}+dz^{3n}$ etc. actu in istiusmodi factores duplices reales resolventur[34].

In questo ambito, per studiare gli zeri di un polinomio di grado dispari, stabilisce il teorema dei valori intermedi ed applica i risultati ottenuti per mostrare come una funzione razionale fratta possa essere decomposta in funzioni razionali semplici a seconda delle radici del polinomio a denominatore.

Analizzando varie trasformazioni di funzioni tramite sostituzioni della variabile, egli considera in modo particolare il problema della razionalizzazione delle funzioni irrazionali, individuando molte utili sostituzioni.

Come indica il titolo dell'opera, un punto centrale della trattazione è dedicato alla rappresentazione delle funzioni tramite le serie, ottenute con considerazioni algebriche, senza ricorrere alle equazioni differenziali. Nella *Introductio* Euler usa infinitamente piccoli e infinitamente grandi ma spesso ragiona in termini di limiti, sia pure in modo istintivo non avendo a disposizione la teoria dei limiti e non ritenendo che essa debba essere posta alla

---

[33] Sul ruolo di Euler nel dibattito che condusse alla dimostrazione rigorosa del teorema fondamentale dell'algebra cfr. Ch. GILAIN, *Sur l'histoire du théorème fondamental de l'algèbre: théorie des équations et calcul intègral*, AHES, 42, 1991, pp. 91-136, in particolare pp. 106-113.

[34] L. EULER, *Introductio...*, vol. 1, Lausannae, 1748, p. 19, EULER, *Opera*, series I, vol. 8, p. 37.

base del calcolo infinitesimale. Infatti dal punto di vista dei fondamenti del calcolo egli è un infinitesimalista e così si colloca, ancora una volta, nel filone leibniziano. La sua preferenza per gli infinitesimi è forse anche dovuta alla sua esperienza come matematico applicato: infatti, quando si usa l'analisi matematica come strumento di indagine per problemi applicativi, per esempio di fisica matematica, la considerazione degli infinitesimi si rivela particolarmente conveniente per giungere al risultato.

Condizionato dalla sua notevole capacità algoritmica, Euler ritiene che ogni funzione sia rappresentabile tramite una serie di potenze del tipo

$$Az^{\alpha} + Bz^{\beta} + Cz^{\gamma} + Dz^{\delta} + \dots,$$

purché gli esponenti α, β, γ, δ, ecc. siano numeri qualunque (interi o non interi, positivi o negativi). Questa proprietà è peculiare della sua visione ed Euler, non potendo mostrare che ogni funzione è sviluppabile in serie di potenze, sostiene di essere in grado di togliere ogni dubbio esibendo lo sviluppo di qualunque funzione:

> Perspicuum autem est nullam functionem non integram ipsius z per numerum huiusmodi terminorum $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 +$ etc. finitum exponi posse; eo ipso enim functio foret integra; num vero per hujusmodi terminorum seriem infinitam exhiberi possit, si quis dubitet, hoc dubium per ipsam evolutionem cuiusque functionis tolletur. Quo autem haec explicatio latius pateat, praeter potestates ipsius z exponentes integros affirmativos habentes, admitti debent potestates quaecunque[35].

Così, a differenza di quanto accadeva in generale nell'indirizzo leibniziano, le serie si avviano a giocare un ruolo sempre più importante nella analisi del Settecento, ruolo che culminerà con la teoria di Lagrange in cui esse vengono assunte come fondamento del calcolo infinitesimale. Osserviamo a questo proposito che le funzioni considerate all'epoca erano per lo più sviluppabili in serie di potenze e che, come si già detto, non c'era ancora una particolare sensibilità per eventuali difficoltà locali, che si presentavano per particolari valori delle variabili.

La considerazione delle serie diventa particolarmente importante quando si trattano le funzioni trascendenti. Infatti Euler, prescindendo da ogni rappresentazione geometrica e in sintonia con la sua definizione di funzione come formula analitica che lega costanti e variabili, utilizza le serie come strumento per rappresentare i valori assunti dalle funzioni trascendenti e quindi garantire loro lo status di funzioni. Egli interpreta le serie come estensione infinita del concetto di polinomio e quindi esse gli

---

[35] L. EULER, *Introductio…*, vol. 1, cit., pp. 46-47, EULER, *Opera*, series I, vol. 8, p. 74.

appaiono un modo semplice e naturale per rappresentare le funzioni trascendenti:

> Quin etiam natura functionum trascendentium melius intelligi censetur, si per ejusmodi formam, etsi infinitam, exprimantur[36].

Euler spiega come si ottiene lo sviluppo delle funzioni razionali tramite le serie ricorrenti e determina gli sviluppi delle funzioni irrazionali, dell'esponenziale, del logaritmo e delle funzioni trigonometriche a partire dalla serie binomiale, senza far uso di argomentazioni differenziali e senza porsi il problema della legittimità di tali rappresentazioni.

Egli presenta una definizione funzionale dell'esponenziale e definisce il logaritmo come funzione inversa. Questo è un progresso molto importante. Come è noto le curve che non ammettono una equazione algebrica, escluse da Descartes dall'indagine matematica, erano state totalmente restituite da Leibniz alla ricerca, ammettendo per esse la rappresentazione differenziale. L'esponenziale era definito tramite le proprietà geometrica di essere la curva con sottotangente costante oppure tramite quella algebrica di mutare ascisse in progressione aritmetica in ordinate in progressione geometrica. Anche i logaritmi erano ampiamente calcolati e resi disponibili sotto forma di tavole, ma la loro definizione era geometrica, ancorata all'area dell'iperbole.

Anche la presentazione delle funzioni trigonometriche è totalmente analitica e assume praticamente la sua forma definitiva. Seno, coseno e tangente sono introdotte come funzioni e non come segmenti di una figura geometrica e ne vengono date tutte le principali proprietà.

Un punto molto importante della trattazione è il collegamento delle funzioni trigonometriche con esponenziali e logaritmi di variabile complessa[37]. Dall'identità

$$\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = \left(\cos z + \sqrt{-1}\,\operatorname{sen} z\right)\left(\cos z - \sqrt{-1}\,\operatorname{sen} z\right) = 1$$

Euler deduce la formula di De Moivre

$$\left(\cos z \pm \sqrt{-1}\operatorname{sen} z\right)^n = \cos nz \pm \sqrt{-1}\operatorname{sen} nz$$

e le celebri formule, oggi note con il suo nome, che legano l'esponenziale

---

[36] L. EULER, *Introductio…*, vol. 1, cit., p. 46, EULER, *Opera*, series I, vol. 8, p. 74.

[37] L. EULER, *Introductio…*, vol. 1, cit., pp. 97-98, 103-105, EULER, *Opera*, series I, vol. 8, pp. 140-141, 147-149.

con esponente immaginario alle funzioni seno e coseno di archi reali:

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \qquad \cos z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2}$$

$$e^{z\sqrt{-1}} = \cos z + \sqrt{-1}\operatorname{sen} z .$$

Dall'ultima definizione segue che $e^{z\sqrt{-1}} = e^{z\sqrt{-1}+2k\pi\sqrt{-1}}$ ovvero che l'esponenziale con esponente immaginario è periodico di periodo $2\pi\sqrt{-1}$.

Per quel che riguarda il logaritmo Euler osserva che i logaritmi dei numeri negativi sono immaginari (cioè complessi, secondo la terminologia moderna) e fornisce la formula

$$z = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log\left(\frac{\cos\ z + \sqrt{-1}\sin\ z}{\cos\ z - \sqrt{-1}\sin\ z}\right)$$

da cui si deduce che il logaritmo di un numero complesso di modulo 1 è uguale a *i* volte il suo argomento.

La funzione logaritmo è di nuovo considerata nel capitolo dedicato alle curve trascendenti che si trova nel secondo volume dell'*Introductio*. In esso, oltre a ribadire che i logaritmi dei numeri negativi sono immaginari, Euler afferma che ogni numero ammette infiniti logaritmi dei quali al più uno è reale[38]. Come se fosse egli stesso stupito dalla sua scoperta, Euler definisce questo risultato paradossale e continuerà a lavorare su questo tema fino a calcolare esplicitamente le infinite determinazioni del logaritmo in un articolo presentato all'Accademia di Berlino nel settembre 1747[39]. Tuttavia dobbiamo rilevare che già nel 1744 egli aveva in buona parte individuato le proprietà caratteristiche del logaritmo nel campo complesso.

Mentre il primo volume dell'*Introductio* è sostanzialmente dedicato allo studio di funzioni analitiche, il secondo volume, che espone la teoria delle curve e delle superficie, inizia con le interessanti definizioni di curva continua e di curva discontinua che hanno i naturali corrispettivi nelle funzioni che definiscono la curva[40]. Osserviamo subito che i termini "continua" e "discontinua" sono usati in un'accezione diversa dall'attuale: una curva è continua secondo Euler, se la sua natura è e-

---

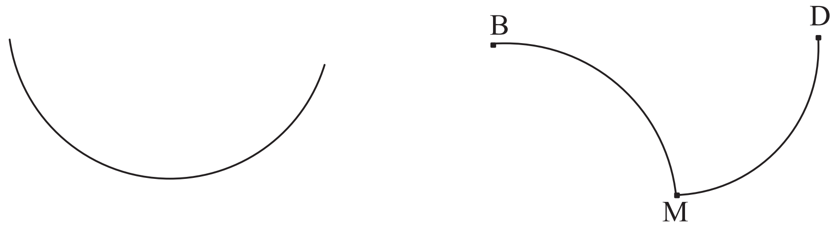
[38] L. EULER, *Introductio…*, vol. 2, cit., pp. 290-292, EULER, *Opera*, series I, vol. 9, pp. 292-294.

[39] L. EULER, *De la controverse entre Mrs. Leibniz et Bernoulli sur les logarithmes des nombres negatifs et imaginaires*, Mém. Berlin, V, 1749 (1751), pp. 139-179, EULER, *Opera*, series I, vol. 17, pp. 195-232.

[40] L. EULER, *Introductio…*, vol. 2, cit., p. 6, EULER, *Opera*, series I, vol. 9, p. 11.

spressa tramite una sola funzione, ovvero espressione analitica, della variabile x, una curva è discontinua secondo Euler, se invece essa è composta da almeno due "porzioni" continue BM e MD, definite tramite funzioni, ovvero leggi, diverse della variabile x.

Fig. 2



Curva continua secondo Euler. Curva discontinua secondo Euler.

Dunque le curve discontinue secondo Euler sono rappresentate da espressioni analitiche diverse in due o più intervalli del loro dominio e dal punto di vista della regolarità sono curve continue ma non derivabili, in senso moderno. Invece la continuità secondo Euler è un concetto globale che vuol dire validità in grande della stessa espressione analitica e le curve continue secondo Euler sono curve regolari, cioè almeno derivabili in senso moderno, definite da un'unica legge fra le coordinate.

La discussione intorno al concetto di funzione diventa centrale verso la metà del Settecento in connessione al problema fisico-matematico di studiare le piccole vibrazioni nel piano di una corda fissata agli estremi. A d'Alembert, che sosteneva di aver trovato la soluzione più generale possibile del problema e rilevava esplicitamente che la configurazione iniziale della corda dovesse essere una funzione soggetta alla legge di continuità e due volte differenziabile[41], Euler ribatte[42] di voler ricercare una soluzione così generale che la configurazione iniziale possa essere tracciata arbitrariamente e possa anche non essere rappresentata da una sola equazione. Inoltre, in un successivo lavoro[43], egli ribadisce che la configurazione iniziale deve essere assolutamente arbitraria, e quindi può essere sia rappresentata da una curva

[41] J. D'Alembert, *Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration*, Mém. Berlin, III, 1747 (1749), pp. 214-219; *Suite des recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration*, Mém. Berlin, III, 1747 (1749), pp. 220-229.

[42] L. Euler, *Sur la vibration des cordes*, Mém. Berlin, IV, 1748 (1750), pp. 69-85, Euler, *Opera*, series II, vol. 10, pp. 63-77.

[43] L. Euler, *Remarques sur les memoires precedens de M. Bernoulli*, Mém. Berlin, IX, 1753 (1755), pp. 196-222, Euler, *Opera*, series II, vol. 10, pp. 233-254.

algebrica o trascendente descritta da una qualche equazione, sia tracciata in modo qualunque senza che sia soggetta alla legge di continuità.

Così Euler si persuade dell'importanza, da un punto di vista fisico matematico, delle funzioni discontinue e matura la convinzione che la definizione di funzione debba essere svincolata dal modo in cui la funzione stessa è rappresentata. Frutto di questi approfondimenti è la nuova e più generale formulazione del concetto di funzione che Euler pubblica nelle *Institutiones calculi differentialis*, una definizione che prescinde dalla rappresentazione analitica e utilizza invece la nozione di corrispondenza:

> Quae autem quantitates hoc modo ab aliis pendent, ut his mutatis etiam ipsae mutatione subeant, eae harum functiones appellari solent; quae denominatio latissime patet atque omnes modos, quibus una quantitas per alias determinari potest, in se complectitur[44].

I concetti di funzione continua e discontinua trovano ulteriori precisazioni in una memoria, presentata all'Accademia di San Pietroburgo nel 1765, sull'utilità delle funzioni discontinue (cioè non differenziabili) in analisi[45]. Egli ribadisce qui che continuità vuol dire immutabilità della definizione della funzione nel suo dominio ovvero una curva è continua se è definita da un'unica legge fra le coordinate per tutti i valori della variabile: tale unicità racchiude in sé il principio di continuità dal momento che nessuna modifica può avere luogo in porzioni della curva senza modificare la legge, e dunque senza infrangere il vincolo di continuità:

> Iam vero notissimum est, in Geometria sublimiori alias lineas curvas considerari non solere, nisi quarum natura certa quadam relatione inter coordinatas per quampiam aequationem expressa definiatur, ita ut omnia ejus puncta per eandem aequationem tanquam legem determinentur. Quae lex cum principium continuitatis in se complecti censeatur, quippe qua omnes curvae partes ita vinculo arctissimo inter se coharent, ut nulla in illis mutatio salvo continuitatis nexu locum invenire possit, hanc ob rem istae lineae curvae continuae appellantur, nihilque interest, sive aequatio illarum natura continens sit algebraica sive transcendens, sive cognita sive etiamnum incognita, dummodo intelligamus dari quandam aequationem, qua natura huiusmodi linearum curvarum exprimatur[46].

---

[44] L. EULER, *Institutiones calculi differentialis cum ejus usu in analysi finitorum ac doctrina serierum*, Petropoli, 1755, p. VI, EULER, *Opera*, series I, vol. 10, p. 4.

[45] L. EULER, *De usu functionum discontinuarum in analysi*, NCP, XI, 1765 (1767), pp. 67-102, EULER, *Opera*, series I, vol. 23, pp. 74-91.

[46] L. EULER, *De usu functionum discontinuarum in analysi*, NCP, XI, 1765 (1767), p. 68, EULER, *Opera*, series I, vol. 23, pp. 75-76.

Le curve che si dicono "discontinue" sono tali non perché costituite da parti sconnesse, ma perché non sono definite da un'unica legge o equazione, oppure sono addirittura tracciate a mano libera. Così l'iperbole è una curva continua, pur essendo costituita da due rami, mentre una spezzata è una curva discontinua pur essendo disegnata con un tratto continuo. Il problema della ricerca delle soluzioni delle equazioni alle derivate parziali ha mostrato ai matematici – spiega Euler – che è necessario sviluppare una nuova analisi che abbracci anche le funzioni discontinue. Infatti mentre l'integrale di una equazione differenziale ordinaria dipende da costanti arbitrarie, quello di una equazione alle derivate parziali dipende da funzioni arbitrarie che possono dunque essere anche funzioni discontinue.

Osserviamo che nell'affermazione di Euler circa l'impossibilità di mutare una funzione continua senza infrangere il vincolo che lega le sue parti affiora la ben nota proprietà delle funzioni analitiche di essere individuate in tutto il dominio dalla loro conoscenza in un sottointervallo; se poi ricordiamo che le funzioni analitiche altro non sono che le somme delle serie di potenze, allora comprendiamo quale profonda intuizione soggiacesse al concetto fornito da Euler.

La distinzione fra funzioni continue e discontinue nel senso di Euler con l'evolversi delle conoscenze è destinata a cadere, colpita dalle stringenti critiche mosse da Cauchy:

> Dans les Ouvrages d'Euler et de Lagrange, une fonction est appelée continue ou discontinue suivant que les diverses valeurs de cette fonction, correspondantes à diverses valeurs de la variable, sont ou ne sont pas assujetties à une même loi, sont ou ne sont pas fournies par une seule et même équation. […]. Toutefois, la définition que nous venons de rappeler, est loin d'offrir une précision mathématique; car, si les diverses valeurs d'une fonction, correspondantes aux diverses valeurs d'une variable, dépendent de deux ou de plusieurs équations distinctes, rien n'empêchera de diminuer le nombre de ces équations, et même de les remplacer par une équation unique, dont la décomposition fournirait toutes les autres. Il y a plus: […] il peut arriver que diverses formules représentent, pour certaines valeurs d'une variable x, la même fonction; puis pour d'autres valeurs de x, des fonctions différentes. Par suite si l'on considère la définition d'Euler et de Lagrange comme applicable à toutes espèces de fonctions, soit algébriques, soit transcendantes, un simple changement de notation suffira souvent pour transformer une fonction continue en discontinue, et réciproquement. […] Ainsi, le caractère de continuité dans les fonctions, envisagé sous le point de vue auquel se sont d'abord arrêtés les géomètres, est un caractère vague

> et indéterminé. Mais l'indétermination cessera si à la définition d'Euler on substitue celle que j'ai donné dans le Chapitre II de l'Analyse algébrique[47].

invece la storia dello sviluppo dell'analisi matematica ci mostra che la definizione di funzione basata sul concetto generale di corrispondenza e lo studio delle soluzioni non regolari delle equazioni differenziali saranno destinati ad affermarsi e precisarsi nel tempo.

[47] A. CAUCHY, *Mémoire sur les fonctions continues ou discontinues*, Comptes Rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, vol. 18, Janvier 1844, pp. 116-117, *Oeuvres complètes*, s. I, vol. 8, pp. 145-146.