

Luigi Gatteschi

(Pelago, 15 luglio 1923 – Torino, 11 aprile 2007)

Commemorazione tenuta dal Socio corrispondente GIAMPIETRO ALLASIA*
nell'adunanza del 12 marzo 2008



Il giorno 11 aprile 2007, a Torino, è mancato Luigi Gatteschi, socio corrispondente di questa Accademia dal 1974 e socio nazionale dal 1992, professore emerito dell'Università di Torino, già ordinario di Analisi Numerica. Dopo aver lottato per quasi due decenni con energia e coraggio eccezionali contro un'invalidante emiparesi, sempre continuando il suo lavoro, ha dovuto alla fine arrendersi per sopraggiunte complicazioni.

Luigi è stato una delle figure più rappresentative della matematica numerica e applicata al cui sviluppo ha dato importanti contributi sia sul piano

della ricerca sia su quello organizzativo e gestionale, ricoprendo molti ed importanti incarichi istituzionali a livello nazionale e locale.

Nato il 15 luglio 1923 a Pelago (Firenze), un'antica cittadina adagiata su una dolce collina, dove sono previste iniziative per ricordarlo, Luigi riposa ora nel piccolo cimitero di Tavagnasco, non lontano da Ivrea, dove era solito trascorrere le vacanze estive. In quell'ambiente tranquillo e appartato, riusciva a godere più intensamente la vicinanza dei famigliari, la moglie Marcella, i figli Gianluca e Stefano (laureati in Matematica) e Alessandro (laureato in Ingegneria), a rilassarsi dai gravosi impegni, a fare lunghe passeggiate, ma anche a lavorare attivamente alle sue ricerche. Era conosciuto e stimato dagli abitanti del paese, che si raccolsero numerosi attorno al feretro per porgergli l'ultimo saluto ed esprimere il proprio affetto ai famigliari.

*Professore ordinario di Analisi numerica nell'Università di Torino

Luigi si laurea in Matematica nel 1945 nell'Università di Firenze, dove inizia la sua attività scientifica. Sotto la guida di Giovanni Sansone (vedi Gatteschi, L., Giovanni Sansone (1888–1979). Cenni commemorativi, *Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* 116 (1982), 483–488), che manteneva viva la tradizione dell'illustre scuola di matematici toscani, acquisisce una solida formazione di analisi classica ed una particolare attenzione alla chiarezza di pensiero e semplicità di esposizione. Un problema di teoria dei numeri, proposto dallo stesso Sansone e rimasto tuttora irrisolto, riguardante l'irriducibilità nel campo razionale dei polinomi di Legendre, fa nascere in Luigi l'interesse allo studio delle funzioni speciali. I primi risultati da lui conseguiti sull'argomento riguardano la valutazione asintotica degli zeri dei polinomi sferici e ultrasferici, e delle funzioni di Bessel.

Una borsa di studio Fulbright consente a Luigi nel 1951 un soggiorno di sei mesi alla Stanford University (USA), dove ha l'opportunità di seguire seminari di Gabor Szegő e Johannes van der Corput, illustri cultori di funzioni speciali.

Nel 1952 Luigi si trasferisce con la famiglia a Bari, come assistente ordinario di Analisi Matematica presso la Facoltà di Scienze MFN di quella Università. Nel 1955 consegue, primo in Italia, la libera docenza in Calcoli Numerici e Grafici, disciplina oggi identificata con l'Analisi Numerica.

In conseguenza dei notevoli risultati ottenuti nello studio delle funzioni speciali, Luigi viene invitato nel 1956 da Francesco G. Tricomi a trasferirsi a Torino. Egli raggiunge la nuova e definitiva sede come assistente ordinario di Analisi Matematica nella Facoltà di Scienze MFN, diventando successivamente assistente ordinario di Analisi Superiore, con qualifica di aiuto. Come professore incaricato tiene corsi di Teoria delle Funzioni, Analisi Superiore, Istituzioni di Analisi Superiore, e Calcoli Numerici e Grafici. Di quest'ultima disciplina diventa titolare di cattedra dal 1967 al 31.10.1998, data del suo collocamento a riposo.

Tricomi, un eminente analista di rara versatilità, aveva un forte interesse per le funzioni speciali, essendo ben consapevole della loro utilità e dell'importanza di eseguire calcoli con rigorose e realistiche valutazioni dell'errore. Di certo Tricomi rafforzò in Luigi la consapevolezza dell'importanza dell'aspetto costruttivo ed algoritmico, che lo condurrà a fare una matematica al tempo stesso rigorosa ed applicabile. Nel commentare un suo lavoro Tricomi scrive nel 1967 (in Tricomi, F.G., *La mia vita di matematico attraverso la cronistoria dei miei lavori*, Cedam, Padova, 1967, p. 95; un interessante libretto in uno stile diretto e schietto): “Luigi Gatteschi – che fu poi lungamente mio apprezzato assistente ed ora è mio caro collega – aveva ripreso, credo per suggerimento di Sansone, le mie ricerche [...] sugli zeri dei polinomi di Legendre, estendendole ai polinomi ultrasferici e – cosa molto più importante – assegnando degli

espliciti confini superiori degli errori delle relative formule d'approssimazione. Nel presente lavoro [...] riferisco sulle semplificazioni da me apportate ai risultati – formalmente un po' complicati – di Gatteschi, onde poterli accogliere nei volumi del *Bateman Project*¹".

Come direttore dell'Istituto di Calcoli Numerici dell'Università di Torino dal 1967 fino alla costituzione del Dipartimento di Matematica, Luigi si dedica con grande impegno allo sviluppo e potenziamento dell'istituto e, in particolare, del suo centro di calcolo. L'operazione di dotare il centro degli strumenti di calcolo indispensabili per la ricerca è stata di vitale importanza e assai complessa e difficoltosa, a causa del rapido progresso tecnologico da un lato e dei vincoli di bilancio dall'altro. Oggi è difficile rendersi conto dell'incredibile evoluzione degli strumenti di calcolo a partire dagli anni sessanta. Basti pensare che ancora nel 1960 le esercitazioni di calcolo numerico venivano tenute sulla Brunsviga Nova, una pesantissima addizionatrice meccanica a levette e manovelle (vedi Zeuli, T., *Introduzione ai calcoli numerici e grafici*, 2a ed., Gheroni, Torino, 1958), mentre gli ingegneri usavano il regolo calcolatore incomparabilmente più maneggevole e potente, ma poco preciso.

Molto attiva è la partecipazione di Luigi agli organi del Consiglio Nazionale delle Ricerche, come componente del Consiglio Scientifico del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue Applicazioni, come direttore del Gruppo Nazionale per l'Informatica Matematica (confluito successivamente nell'Istituto Nazionale di Alta Matematica e ristrutturato nell'attuale Gruppo Nazionale per il Calcolo Scientifico), come componente del Consiglio Scientifico dell'Istituto per le Applicazioni della Matematica e dell'Informatica, ed infine come componente del Comitato per la Matematica per oltre 11 anni, che fu il compito più impegnativo e gravoso.

All'inizio degli anni settanta Luigi coordina i corsi estivi di Perugia, dove gran parte dei matematici italiani ha avuto l'occasione di incontrarsi, di conoscere colleghi e professori stranieri, di completare la propria preparazione. Questo compito, fondamentale e delicato, era da lui svolto con grande calore umano e appassionato impegno².

Luigi era socio dell'Unione Matematica Italiana dal 1947 e socio fondatore

¹Il "Bateman manuscript project" è una collezione di libri sulla teoria delle funzioni speciali pubblicati nel 1953–1955 e basati sugli appunti del matematico Harry Bateman. I volumi furono curati da Arthur Erdélyi, Francesco Tricomi, Wilhelm Magnus e Fritz Oberhettinger. I tre volumi, intitolati "Higher Transcendental Functions" trattano delle funzioni speciali, mentre i restanti due, "Tables of Integral Transforms," riguardano le trasformate integrali. L'opera venne considerata come la bibbia delle funzioni speciali.

²Queste parole fanno parte di un simpatico ricordo dovuto a Giuseppe Anichini, professore dell'Università di Firenze ed editore del Notiziario dell'Unione Matematica Italiana, ricordo che egli ha voluto aggiungere alla notizia della scomparsa di Luigi pubblicata con breve nota biografica (vedi Notiziario UMI, Anno XXXIV, N. 7, Luglio 2007, pp. 94–96).

dal 1995. Poche settimane prima della sua scomparsa, aveva concluso per conto dell'Unione Matematica Italiana, ricevendone pubblico ringraziamento, l'opera di coordinamento della scelta di articoli per i prossimi volumi della collana Opere dei Grandi Matematici dedicati a Francesco G. Tricomi.

Intensa è stata l'attività di Luigi come recensore per le riviste *Zentralblatt für Mathematik* dal 1963 (circa 350 recensioni) e per *Computing Reviews ACM* dal 1972 (circa 50 recensioni). Ha fatto parte dei comitati scientifici delle riviste *Calcolo*, per molti anni, e *Integral Transform and Special Functions* dalla sua fondazione. È stato membro dal 1974 al 1979 del comitato di coordinamento della monumentale seconda edizione in undici volumi del Dizionario di Ingegneria, fondato da Eligio Perucca ed edito dalla UTET nel periodo 1968-1979, firmando molte voci. Analogo è stato il suo contributo alla quarta edizione in 20 volumi del Grande Dizionario Enciclopedico UTET, fondato da Pietro Fedele.

Notevolissimo è l'impegno profuso da Luigi nell'attività scientifica, documentato da circa 80 pubblicazioni, da due volumi di lezioni di Calcoli Numerici, e da una pregevole monografia sulle Funzioni Speciali, mirabile per chiarezza, rigore e semplicità espositiva. Raccogliendo l'eredità lasciata da Tricomi, Luigi ha portato un considerevole contributo allo sviluppo delle ricerche sulle Funzioni Speciali, mantenendo ed incrementando il prestigio internazionale della scuola torinese in questo settore di ricerca.

L'attività scientifica di Luigi è principalmente rivolta a problemi di Analisi Numerica e Teoria dell'Approssimazione. Particolare attenzione meritano le sue ricerche sui metodi asintotici per il trattamento delle funzioni speciali, sulle quadrature numeriche e sugli algoritmi iterativi. L'analisi utilizzata ed i metodi usati nell'affrontare e nel condurre le varie ricerche hanno costantemente come obiettivo principale l'esplicita valutazione dell'errore commesso nelle approssimazioni ottenute.

L'importanza delle ricerche effettuate da Luigi è ampiamente documentata dai riconoscimenti di specialisti tra i maggiori del settore, e numerosi suoi risultati, esposti per esteso, trovano posto nei trattati. Ad esempio, un risultato di Luigi è riportato con lusinghiero apprezzamento nel classico trattato di G. Szegő sui polinomi ortogonali (Szegő, G., *Orthogonal Polynomials*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol. 23, 4th ed., AMS, Providence, RI, 1975) a partire dalla edizione del 1959; i risultati sugli algoritmi iterativi sono riportati nel volume di J. Wimp sulle relazioni di ricorrenza (Wimp, J., *Computation with Recurrence Relations*, Pitman, Boston, 1984), e quelli sulle approssimazioni asintotiche in una monografia di È. Riekstyn'sh sui metodi asintotici per il trattamento delle equazioni (Riekstyn'sh, È.Ya., *Asimptotika i otsenki kornei uravnenii* (Asymptotics and bounds of the roots of equations), Zinatne, Riga,

1991).

A Luigi è dedicato il Fourth International Symposium on Orthogonal Polynomials and their Applications, tenuto ad Evian-les-Bains nell'ottobre del 1992 (vedi Brezinski, C., et al. (eds.), *Proceedings of the Fourth International Symposium on Orthogonal Polynomials and their Applications (Evian-Les-Bains, 19–23 October 1992)*, J. Comput. Appl. Math. 57 (1995), nos. 1–2, 364 pp.). Nel 1993 si tiene a Torino un convegno internazionale in occasione del suo settantesimo compleanno, al quale partecipano vari importanti matematici che sottolineano l'importanza delle sue ricerche (vedi Allasia, G. (ed.), *Special Functions (Torino, 1993)*, Ann. Numer. Math. 2 (1995), nos. 1–4, 474 pp., e Allasia, G. (ed.), *Special Functions (Torino, 1993), Numerical Algorithms 10 (1995)*, nos. 1–2, 202 pp.). In ricordo di Luigi è in preparazione un numero speciale di circa 400 pagine della rivista *Numerical Algorithms* recante contributi di studiosi italiani e stranieri³.

Ampie descrizioni dell'attività scientifica di Luigi si trovano negli articoli di W. Gautschi⁴ (Gautschi, W., *Luigi Gatteschi's work on special functions and numerical analysis*, in *Special functions (Torino, 1993)*, ed. G. Allasia, Ann. Numer. Math. 2 (1995), nos. 1–4, 3–19), di R. Wong⁵ (Wong, R., *Error bounds for asymptotic approximations of special functions*, *ivi*, 181–197), e di W. Gautschi e C. Giordano (Gautschi, W., and C. Giordano, *Luigi Gatteschi's work on asymptotics of special functions and their zeros*, in corso di stampa sul numero speciale di *Numerical Algorithms*).

Richard Askey, eminente cultore e storico delle funzioni speciali, in una lettera a G. Allasia, in occasione del convegno torinese suddetto e riportata nella prefazione agli atti, scriveva:

The connection between Special Functions and Torino is an old and honorable one. Lagrange was the first to study what we now call Legendre polynomials, which arose in his work on probability theory. In this century, Tricomi's work on confluent hypergeometric functions and other functions still lives, both in his research and the work he and others did in writing the marvelous books "Higher Transcendental Functions I, II and III", as well as his specialized books on many different functions. Luigi Gatteschi was his successor, and his work lives on in the very sharp error estimates he obtained for asymptotic expansions of a number of functions. Some of his earlier work was given in his excellent text-book, but his work continued and deepened, and the results for

³Aggiunta in bozze: Allasia, G., C. Brezinski, and M. Redivo-Zaglia (eds.), *A collection of essays in memory of Luigi Gatteschi*, *Numerical Algorithms* 49 (2008), nos. 1–4, 381 pp.

⁴Walter Gautschi, Socio straniero dell'Accademia dal 2001, professore emerito della Purdue University, West Lafayette, Indiana.

⁵Roderick S. Wong, Socio straniero dell'Accademia dal 2001, professore di Matematica nella City University di Hong Kong.

Jacobi polynomials and their zeros finally became deep enough to be very useful in solving problems which we do not know how to solve in other ways. This legacy will last, and he has our thanks for this work and the other work he did.

Luigi possedeva eccezionali capacità didattiche e un modo cordiale di rapportarsi con gli studenti. Per tanti è stato un maestro che ha trasmesso i suoi insegnamenti con semplicità e sincera generosità: severo e preciso, ha lasciato scintille della sua passione in coloro che l'hanno ascoltato. E la matematica ha veramente rappresentato per Luigi un valore fondamentale, un amore appassionato, una ragione di vita che lo ha accompagnato anche quando i problemi di salute lo hanno pesantemente condizionato.

Ancora prima delle elevate capacità scientifiche, colpivano in Luigi le doti umane: cordialità, comprensione, sensibilità, facilità nei rapporti interpersonali. Queste doti gli hanno valso la simpatia e l'amicizia di molti, studenti, amici e colleghi, e certamente contribuiranno a renderne duraturo il ricordo.

Si riportano nel seguito i risultati più significativi conseguiti nei vari argomenti di ricerca.

1. Funzioni speciali

In un lavoro di rassegna di oltre cinquanta anni fa [21], Gatteschi (uso qui il cognome per uniformità con gli altri autori) pone in luce ed illustra con esempi l'importanza della costruzione di maggiorazioni numeriche degli errori associati alle approssimazioni asintotiche. Si tratta, in altre parole, di dare ad una rappresentazione, ad esempio della forma

$$f(x) = g(x) + O\left(\frac{1}{x^3}\right), \quad x \rightarrow \infty,$$

il significato non solo di esistenza di non precisate costanti positive A ed x_0 tali che

$$|f(x) - g(x)| \leq \frac{A}{x^3}, \quad x \geq x_0,$$

ma di porsi il problema della esplicita e realistica determinazione di A e di x_0 , in modo che la funzione $g(x)$ si possa riguardare come una effettiva approssimazione di $f(x)$.

Rappresentazioni asintotiche con maggiorazioni degli errori ad esse associati ed aventi le suddette peculiarità sono state ottenute per varie classi di funzioni e per i loro zeri. Talvolta le approssimazioni ottenute sono risultate così aderenti da poter essere usate per provare alcune congetture. Più precisamente:

(a) una rappresentazione asintotica uniforme degli zeri dei polinomi di Jacobi, stabilita da Baratella e Gatteschi [60], ha consentito a Qu e Wong (Qu, C.K., and R. Wong, Szegö's conjecture on Lebesgue constants for Legendre series, *Pacific. J. Math.* 135 (1988), 157–188) di provare una congettura di Szegö riguardante la monotonicità delle costanti di Lebesgue per la serie di Legendre, ed a Wong e Zhang (Wong, R., and J.-M. Zhang, On the relative extrema of Jacobi polynomials $P_n^{(9,-1)}(x)$, *SIAM J. Math. Anal.* 25 (1994), 181–197) una congettura di Askey sulla monotonicità degli estremi relativi del polinomio di Jacobi;

(b) le approssimazioni date da Gatteschi [10, 21] per gli zeri delle funzioni di Bessel hanno permesso a Wong e Lang (Wong, R., and T. Lang, On the points of inflection of positive order II, *Can. J. Math.* 43 (1991), 509–518) di provare una congettura di Lorch e Szegö sui punti di inflessione delle funzioni di Bessel.

Le approssimazioni degli zeri positivi $j_{\nu,k}$ della funzione di Bessel $J_\nu(x)$ alle quali sopra ci si riferisce sono ottenute da rappresentazioni asintotiche per $x \rightarrow \infty$ del tipo di Hankel e pertanto richiedono che l'ordine ν resti limitato e che k sia grande. Ulteriori risultati conseguiti recentemente [65] forniscono approssimazioni, per difetto e per eccesso, valide per valori non necessariamente limitati dell'ordine ν e per tutti i k . Le ricerche riguardanti le approssimazioni degli zeri $j_{\nu,k}$ fornite dal classico sviluppo asintotico di McMahon, quando $k \rightarrow \infty$ e l'ordine ν si mantiene limitato, sono state perfezionate da Gatteschi in un lavoro in collaborazione con C. Giordano [68] nel quale si studia l'errore anche nel caso di ν non necessariamente limitato. A Gatteschi e Giordano [67] è pure dovuta una nuova maggiorazione del primo zero della funzione di Bessel particolarmente interessante, non solo per la sua precisione, ma anche per il procedimento con il quale è stata stabilita.

Lo studio di approssimazioni asintotiche di tipo uniforme ha caratterizzato le ricerche di Gatteschi a partire dalla metà degli anni ottanta. Oltre ai risultati sopra citati sugli zeri dei polinomi di Jacobi e su quelli più recenti sugli zeri delle funzioni di Bessel, sono state ottenute rappresentazioni asintotiche, con esplicita maggiorazione dell'errore ad esse connesso, degli zeri dei polinomi di Laguerre [57]. Queste rappresentazioni consentono risultati numerici di elevata precisione tali da rendere possibile il loro uso per la generazione automatica di formule di quadratura su intervalli infiniti. Esse sono state pure utilizzate, in una ricerca in collaborazione con I. Cravero [59], per la valutazione asintotica delle costanti di Christoffel associate alle quadrature di Gauss-Laguerre così come era stato fatto [56] per quelle associate alle quadrature di Gauss-Jacobi. Queste valutazioni sono importanti anche in problemi di teoria dell'approssimazione.

Sono state ottenute disuguaglianze per gli zeri dei polinomi di Laguerre [55] e delle funzioni ipergeometriche confluenti [58] applicando teoremi di confronto, del tipo di Sturm, tra l'equazione di Laguerre (o quella confluyente) e due particolari equazioni differenziali, l'una del tipo di Bessel e l'altra del tipo di Airy. Ciò consente di pervenire a rappresentazioni asintotiche uniformi, valide in intervalli chiusi sovrappoventisi parzialmente e che inoltre risultano essere delle disuguaglianze.

Frutto di una ricerca [62] in collaborazione con Y. Chow (Tapei University, Taiwan) e con R. Wong (University of Manitoba, Canada), è l'estensione al caso di Jacobi di una classica disuguaglianza di Bernstein per i polinomi di Legendre. Questa disuguaglianza si è rivelata un utile strumento per la valutazione dell'errore in una rappresentazione asintotica dei polinomi di Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta)$ [63]. Più precisamente, raggruppando i primi due termini di uno sviluppo asintotico formale per $n \rightarrow \infty$, si ottiene una rappresentazione uniforme in $0 \leq \theta \leq \pi/2$ del tipo di Cherry, in termini di funzioni di Bessel e completata da una realistica maggiorazione dell'errore. L'applicazione alla valutazione degli zeri ha permesso di migliorare notevolmente precedenti risultati stabiliti in [53] ed in [54].

Nella trattazione dei polinomi di Jacobi può risultare talvolta conveniente, come Gatteschi aveva proposto in una ricerca del 1967, riferirsi invece che al parametro $N = n + (\alpha + \beta + 1)/2$ ad un altro parametro v così definito

$$v^2 = \left[n + \frac{\alpha + \beta + 1}{2} \right]^2 + \frac{\alpha^2 - 3\beta^2 - 4}{12}.$$

Questa scelta è stata utilizzata in una ultima ricerca [64] sui polinomi di Jacobi ed ha permesso di ottenere un nuovo sviluppo asintotico completo di $P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta)$, valido per $n \rightarrow \infty$ uniformemente in un prefissato intervallo $0 \leq \theta \leq \pi - \delta$ con $0 \leq \delta < \pi$. Dai primi termini di questo sviluppo si ottengono disuguaglianze per gli zeri che sono le migliori possibili nel senso che esse si riducono ad uguaglianze se e solo se $\alpha^2 = \beta^2 = 1/4$, cioè nei casi elementari in cui il polinomio di Jacobi si riduce a polinomi del tipo di Tchebycheff.

2. Quadrature numeriche

L'influenza degli errori casuali nella valutazione della funzione integranda nelle quadrature numeriche è minimizzata quando le costanti d'integrazione (i pesi) della formula di quadratura stessa sono tutti uguali. Ciò accade nelle quadrature di tipo gaussiano con peso $w(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$, cioè di Tchebycheff, ed è ben noto che nel caso del peso $w(x) = 1$ esistono siffatte formule con n nodi reali se e solo se $n = 1, 2, 7, 9$, come è stato dimostrato nel 1937 da

Bernstein (Bernstein S.N., Sur les formules de quadrature de Cote et Tchebycheff, C. R. Acad. Sci. URSS 14 (1937), 323–326). Negli anni sessanta è ripreso l'interesse per il cosiddetto problema di Tchebycheff, cioè per la questione dell'esistenza o meno di funzioni peso che danno luogo a quadrature con pesi uguali. Tale studio richiede un'accurata analisi di disuguaglianze coinvolgenti i nodi e le costanti d'integrazione di ordinarie formule di quadratura gaussiana. È pertanto evidente che questo fatto abbia spinto Gatteschi ad interessarsi della questione. I suoi risultati sulle costanti di Christoffel e sugli zeri dei polinomi ortogonali, ed in particolare le ottime disuguaglianze che da essi potevano ottenersi, gli hanno permesso di pervenire a realistici risultati di non esistenza per svariate classi di formule di quadratura.

Tra i risultati più significativi ricordiamo:

(a) quello riguardante il caso del peso ultrasferico [27], e più in generale di Jacobi [36], per formule di quadratura con nodi multipli agli estremi dell'intervallo;

(b) le nuove condizioni di non esistenza stabilite in una ricerca in collaborazione con Vinardi [39];

(c) lo studio approfondito del caso ultrasferico con nodi semplici agli estremi in collaborazione con Monegato e Vinardi [38].

Formule di quadratura di tipo gaussiano con m nodi, due dei quali siano fissati agli estremi dell'intervallo ed abbiano molteplicità 2, considerate da Gatteschi già nel 1963, sono le più efficienti (v. Gautschi, W., Luigi Gatteschi's work on special functions and numerical analysis, in *Special functions* (Torino, 1993), ed. G. Allasia, Ann. Numer. Math. 2 (1995), nos. 1–4, 3–19, p. 15) in termini di numero di valutazioni richieste per la loro applicazione. Le approssimazioni asintotiche stabilite da Gatteschi per gli zeri di polinomi ortogonali hanno trovato effettiva applicazione nel loro uso quali valori iniziali in procedimenti iterativi per il calcolo dei nodi di quadrature numeriche [41]. Nel caso ultrasferico esse forniscono, con una sola applicazione dell'algoritmo iterativo di Lether (Lether, F.G., On the construction of Gauss-Legendre quadrature rules, J. Comp. Appl. Math 4 (1978), 47–51), ben 20 cifre decimali esatte.

Applicazioni di formule di quadratura gaussiane sono state fatte in lavori in collaborazione con J.N. Lyness dell'Argonne National Laboratory, USA, e precisamente in problemi di integrazione di funzioni periodiche [49] e di cubatura su triangoli di funzioni singolari nei vertici [44, 47].

Un risultato, rilevante nella costruzione del moderno software per la generazione di formule di quadratura per pesi non standard, riguarda il calcolo dei momenti modificati di un dato peso $w(x)$ rispetto ad un conveniente sistema di polinomi ortogonali classici. Gatteschi [43], riprendendo studi di Blue (Blue,

J.L., A Legendre polynomial integral, *Math. Comp.* 33 (1979), 739–741) e di Gautschi (Gautschi, W., On the preceding paper “A Legendre polynomial integral” by James L. Blue, *Math. Comp.* 33 (1979), 741–742) tratta con successo il caso di pesi con singolarità logaritmiche su intervalli finiti ed infiniti.

3. Algoritmi iterativi bidimensionali

È ben nota l'importanza dell'algoritmo della media aritmetico-geometrica di Gauss nella teoria delle funzioni e degli integrali ellittici. Ed è pure noto come una apparentemente leggera modifica lo trasformi in un algoritmo elementare, cioè nel cosiddetto algoritmo di Borchardt

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, \quad y_{n+1} = \sqrt{x_{n+1}y_n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Tricomi, eminente conoscitore delle funzioni ellittiche ed interessato allo studio delle ricorrenze, intravide fin dall'inizio degli anni 60, lo sviluppo che avrebbero potuto avere le ricerche sugli algoritmi iterativi bidimensionali ai fini del calcolo di talune funzioni. I risultati conseguiti da Tricomi e dai suoi collaboratori in Torino sono riportati in un Corso di lezioni tenute alla Maryland University (Tricomi, F.G., *Lectures on the use of special functions by calculations with electronic computers*, University of Maryland Lecture Series No. 47, 1966) dal Tricomi stesso e, con ampi dettagli, nel volume di J. Wimp (Wimp, J., *Computation with recurrence relations*, Pitman, Boston, 1984).

I notevoli risultati di Gatteschi riguardano algoritmi bidimensionali, generalizzanti quello di Borchardt. Tra questi ricordiamo quello [29, 31] ottenuto sostituendo l'ordinaria media aritmetica con una più generale media pesata

$$x_{n+1} = \frac{x_n + (k-1)y_n}{k}, \quad y_{n+1} = \sqrt{x_{n+1}y_n}, \quad k \geq 1,$$

il cui trattamento richiede la considerazione di una nuova trascendente intera, la cosiddetta funzione di Gatteschi, che per $k = 2$ si riduce al coseno ed ha, per gli altri valori di k , un complicato ma interessante comportamento tuttora oggetto di studio [66]. Un altro algoritmo [34], ottenuto combinando “à la Borchardt” una media aritmetica con una media armonica, entrambe pesate,

$$x_{n+1} = \xi x_n + (1 - \xi)y_n, \quad y_{n+1} = \frac{x_{n+1}y_n}{\eta x_{n+1} + (1 - \eta)y_n}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

deve la sua importanza al fatto che risulta

$$X = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_0 \prod_{r=0}^{\infty} \frac{1 - (1 - x_0/y_0)\xi^{r+1}\eta^r}{1 - (1 - x_0/y_0)\xi^r\eta^r}.$$

L'algoritmo è quindi utilizzabile per lo studio del prodotto di Gauss

$$\prod_{n=0}^{\infty} \frac{1 - aq^n}{1 - bq^n},$$

cioè per il calcolo della q-Gamma e di altri q-analoghi della moderna teoria delle funzioni ipergeometriche. Una piccola variante [34] permette di trattare il prodotto infinito ed altri prodotti ad esso associati, come è stato fatto in utili tabulazioni da Allasia e Bonardo (Allasia, G., and F. Bonardo, On the numerical evaluation of two infinite products, *Math. Comp.* 35 (1980), 917–931).

Gabutti e Gatteschi hanno recentemente costruito un algoritmo del tipo di Borchartd, basato come quelli di Tricomi (Tricomi, F.G., Sull'algoritmo iterativo del Borchartd e su di una sua generalizzazione, *Rend. Circ. Mat. Palermo* (2) 14 (1965), 85–94) e Carlson (Carlson, B.C., Hidden symmetries of special functions, *SIAM Rev.* 12 (1970), 332–345) sulla formula di bisezione della funzione cn di Jacobi, che si presenta efficiente più di ogni altro nel calcolo con alta precisione degli integrali ellittici di prima specie. La collaborazione Gabutti-Gatteschi ha portato inoltre alla valutazione di certi prodotti infiniti e allo studio di procedimenti di accelerazione della convergenza degli algoritmi iterativi ad essi associati.

Riferimenti bibliografici

- [1] *Un perfezionamento di un teorema di I. Schur sulla frequenza dei numeri primi*, *Boll. Un. Mat. Ital.* (3) **2** (1947), 123–125.
- [2] *Una classe di polinomi irriducibili*, *Period. Mat.* (4) **26** (1948), 102–105.
- [3] *Costruzione di polinomi irriducibili della forma $ax \prod_{i=1}^{n-1} (x - \alpha_i) + \sum_{v=0}^m g_v x^{m-v}$* , *Period. Mat.* (4) **26** (1948), 157–159.
- [4] *Una formula asintotica per l'approssimazione degli zeri dei polinomi di Legendre*, *Boll. Un. Mat. Ital.* (3) **4** (1949), 240–250.
- [5] *Approssimazione asintotica degli zeri dei polinomi ultrasferici*, *Rend. Mat.* (5) **8** (1949), 399–411.
- [6] (with L.A. ROSATI), *Risposta ad una questione proposta da A. Moessner*, *Boll. Un. Mat. Ital.* (3) **5** (1950), 43–48.

- [7] *Valutazione dell'errore nella formula di McMahon per gli zeri della $J_n(x)$ di Bessel nel caso $0 \leq n \leq 1$* , Riv. Mat. Univ. Parma **1** (1950), 347–362.
- [8] *Sull'approssimazione asintotica degli zeri dei polinomi sferici ed ultrasferici*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) **5** (1950), 305–313.
- [9] *Valutazione dell'errore nella formula di McMahon per gli zeri della funzione $J_0(kz)Y_0(z) - J_0(z)Y_0(kz)$* , Ann. Mat. Pura Appl. (4) **32** (1951), 271–279.
- [10] *On the zeros of certain functions with application to Bessel functions*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 55 (1952), no. 3, and Indag. Math. **14** (1952), 224–229.
- [11] *Limitazione dell'errore nella formula di Hilb e una nuova formula per la valutazione asintotica degli zeri dei polinomi di Legendre*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) **7** (1952), 272–281.
- [12] *Una proprietà degli estremi relativi dei polinomi di Jacobi*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) **8** (1953), 398–400.
- [13] *Il termine complementare nella formula di Hilb-Szegö ed una nuova valutazione asintotica degli zeri dei polinomi ultrasferici*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **36** (1954), 143–158.
- [14] *Sugli zeri di una classe di funzioni di Bessel*, Atti e Relaz. Accad. Pugliese delle Scienze XII (1954), 3–13.
- [15] *Sugli zeri della derivata delle funzioni di Bessel di prima specie*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) **10** (1955), 43–47.
- [16] *Sulla rappresentazione asintotica delle funzioni di Bessel di uguale ordine ed argomento*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **38** (1955), 267–280.
- [17] *Sulla rappresentazione asintotica delle funzioni di Bessel di uguale ordine ed argomento. Nota aggiuntiva*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) **10** (1955), 531–536.
- [18] *Una nuova rappresentazione asintotica dei polinomi di Legendre mediante funzioni di Bessel*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) **11** (1956), 203–209.
- [19] *Sul comportamento asintotico delle funzioni di Bessel di prima specie di ordine ed argomento quasi uguali*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **43** (1957), 97–117.

- [20] *Sulle serie involuppati e loro applicazione alla valutazione asintotica delle funzioni di Bessel*, Confer. Sem. Mat. Univ. Bari **22** (1957), 1–11.
- [21] *Limitazione degli errori nelle formule asintotiche per le funzioni speciali*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino **16** (1956–57), 83–94.
- [22] *Formule asintotiche “ritoccate” per le funzioni di Bessel. Tabulazione e grafici delle funzioni ausiliarie*, Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. **93** (1958–59), 506–514.
- [23] *Metodi di rilassamento*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino **18** (1958–59), 1–9.
- [24] *Formule asintotiche “ritoccate” per il calcolo numerico dei polinomi di Laguerre nella zona oscillatoria*, Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. **96** (1961–62), 285–306.
- [25] *Proprietà asintotiche di una funzione associata ai polinomi di Laguerre e loro utilizzazione al calcolo numerico degli zeri dei polinomi stessi*, Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. **98** (1963–64), 113–124.
- [26] *Su una formula di quadratura “quasi gaussiana”. Tabulazione delle ascisse d’integrazione e delle relative costanti di Christoffel*, Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. **98** (1963–64), 641–661.
- [27] *Su di un problema connesso alle formule di quadratura di Tschebyscheff*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino **23** (1963–64), 75–87.
- [28] *Sulla non esistenza di certe formule di quadratura*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino **24** (1964–65), 157–172.
- [29] *Su una generalizzazione dell’algoritmo iterativo del Borchardt*, Mem. Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (4) **4** (1966), 3–18.
- [30] *Su un metodo di calcolo numerico delle funzioni di Bessel di prima specie*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino **25** (1965–66), 109–120.
- [31] *Su di una equazione funzionale generalizzante quella del coseno*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino **26** (1966–67), 65–86.
- [32] *Una nuova rappresentazione asintotica dei polinomi di Jacobi*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino **27** (1967–68), 165–184.

- [33] *Una nuova disuguaglianza per gli zeri dei polinomi di Jacobi*, Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. **103** (1968–69), 259–265.
- [34] *Procedimenti iterativi per il calcolo numerico di due prodotti infiniti*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino **29** (1969–70), 187–201.
- [35] *Sugli zeri dei polinomi ultrasferici*, in *Studi in onore di Fernando Giaccardi Giraud*, Baccola e Gili, Torino, 1972, pp. 111–122.
- [36] *Il problema di Tchebycheff per formule di quadratura di tipo chiuso*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) **11**, no. 3 suppl. (1975), 641–653.
- [37] (with A. LAFORGIA), *Nuove disuguaglianze per il primo zero ed il primo massimo della funzione di Bessel $J_\nu(x)$* , Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino **34** (1975–76), 411–424.
- [38] (with G. MONEGATO AND G. VINARDI), *Alcuni problemi relativi alle formule di quadratura del tipo di Tchebycheff*, Calcolo **13** (1976), 79–104.
- [39] (with G. VINARDI), *Sul grado di precisione di formule di quadratura del tipo di Tchebycheff*, Calcolo **15** (1978), 59–85.
- [40] *Alcuni risultati sulle formule di quadratura del tipo di Tchebycheff*, Rend. Mat. (6) **10** (1977), 523–533.
- [41] *On the construction of some Gaussian quadrature rules*, in *Numerische Integration*, ed. G. Hämmerlin, ISNM 45, Birkhäuser, Basel, 1979, pp. 138–146.
- [42] *Una nuova rappresentazione asintotica dei polinomi ultrasferici*, Calcolo **16** (1979), 447–458.
- [43] *On some orthogonal polynomial integrals*, Math. Comp. **35** (1980), 1291–1298.
- [44] (with J.N. LYNESS), *A note on cubature over a triangle of a function having specified singularities*, in *Numerische Integration II* (Oberwolfach, 1981), ed. G. Hämmerlin, ISNM 57, Birkhäuser, Basel, 1982, pp. 164–169.
- [45] *Il contributo di Guido Fubini agli algoritmi iterativi*, Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., Suppl. Vol. **115** (1982), 61–70.

- [46] *Giovanni Sansone (1988–1979). Cenni commemorativi*, Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. **116** (1982), 483–488.
- [47] (with J.N. LYNESS), *On quasi degree quadrature rules*, Numer. Math. **39** (1982), no. 2, 259–267.
- [48] (with A. ELBERT AND A. LAFORGIA), *On the concavity of zeros of Bessel functions*, Appl. Anal. **16** (1983), 261–278.
- [49] (with J.N. LYNESS), *An indirect approach to trigonometric quadrature rules*, Calcolo **20** (1983), 261–278.
- [50] (with G. PITTALUGA), *An asymptotic expansion for the zeros of Jacobi polynomials*, in *Mathematical Analysis*, ed. J.M. Rassias, Teubner–Texte für Math. **79**, Teubner, Leipzig, 1985, pp. 70–86.
- [51] *On the zeros of Jacobi polynomials and Bessel functions*, in *Special Functions: Theory and Computation* (Torino, 1984), eds. G. Allasia, L. Gatteschi, W. Gautschi, and G. Monegato, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, Fasc. spec. (1985), pp. 149–177.
- [52] *Bounds and approximations for the zeros of classical orthogonal polynomials. Their use in generating quadrature rules*, in *Numerical Integration. Recent Developments, Software and Applications* (NATO Adv. Res. Workshop, Halifax, Canada, 1986), NATO ASI Ser. C 203 1987, pp. 103–104.
- [53] *New inequalities for the zeros of Jacobi polynomials*, SIAM J. Math. Anal. **18** (1987), no. 6, 1549–1562.
- [54] (with P. BARATELLA), *The bounds for the error term of an asymptotic approximation of Jacobi polynomials*, in *Orthogonal Polynomials and their Applications* (Segovia, Spain, 1986), Lect. Notes Math. 1329, Springer, Berlin, 1988, pp. 203–221.
- [55] *Some new inequalities for the zeros of Laguerre polynomials*, in *Numerical Methods and Approximation Theory III* (Niš, Yugoslavia, 1987), ed. G.V. Milovanovic, Univ. of Niš, Niš, 1988, pp. 23–38.
- [56] *Uniform approximation of Christoffel numbers for Jacobi weight*, in *Numerical Integration III* (Oberwolfach, 1987), eds. H. Brass and G. Hämmerlin, ISNM 85, Birkhäuser, Basel, 1988, pp. 49–59.

- [57] *Uniform approximations for the zeros of Laguerre polynomials*, in *Numerical Mathematics* (Singapore 1988), eds. R.P. Agarwal, Y.M. Chow, and S.J. Wilson, ISNM 86, Birkhäuser, Basel, 1988, pp. 137–148.
- [58] *New inequalities for the zeros of confluent hypergeometric functions*, in *Asymptotic and Computational Analysis* (Winnipeg, 1989), ed. R. Wong, Lecture Notes Pure Appl. Math. **124**, Dekker, New York, 1990, pp. 175–192.
- [59] (with I. CRAVERO), *Uniform approximation of Christoffel numbers for Laguerre weights*, in *Approximation, Optimization and Computing*, eds. A.G. Law and C.L. Wang, North-Holland, Amsterdam, 1990, pp. 59–62.
- [60] (with P. BARATELLA), *Remarks on asymptotics for Jacobi polynomials*, *Calcolo* **28** (1991), nos. 1–2, 129–137.
- [61] *On a representation of Jacobi polynomials*, *Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* **125** (1991), nos. 5–6, 148–153.
- [62] (with Y. CHOW AND R. WONG), *A Bernstein-type inequality for the Jacobi polynomial*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **121** (1994), no. 3, 703–709.
- [63] *New error bounds for asymptotic approximations of Jacobi polynomials and their zeros*, *Rend. Mat. Applic. (7)* **14** (1994), no. 3, 177–198.
- [64] *On some approximations for the zeros of Jacobi polynomials*, in *Approximation and Computation* (West Lafayette, 1993), ed. R.V. Zahar, ISNM 119, Birkhäuser, Boston, 1994, pp. 207–218.
- [65] *Uniform bounds for the zeros of Bessel functions*, *Mem. Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (5)* **22** (1998), 185–210.
- [66] *New results on some two-dimensional iterative algorithms, Tricomi's ideas and contemporary applied mathematics* (Rome/Turin, 1997), *Atti Convegni Lincei* **147**, Accad. Naz. Lincei, Rome, 1998, pp. 137–159.
- [67] (with C. GIORDANO), *Upper bounds for the first zero of the Bessel function $J_\alpha(x)$* , *Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* **133** (1999), 177–185.
- [68] (with C. GIORDANO), *Error bounds for McMahon's asymptotic approximations of the zeros of the Bessel functions*, *Integral Transform. Spec. Funct.* **10** (2000), no. 1, 41–56.

- [69] (with B. GABUTTI), *New asymptotics for the zeros of Whittaker's functions. In memory of W. Gross*, Numer. Algorithms **28** (2001), nos. 1–4, 159–170.
- [70] *Asymptotics and bounds for the zeros of Laguerre polynomials: a survey*, J. Comput. Appl. Math. **144** (2002), nos. 1–2, 7–27.
- [71] *Asymptotics for the zeros of Whittaker's functions*, Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. **136** (2002), 59–71.
- [72] (with C. GIORDANO), *On a method for generating inequalities for the zeros of certain functions*, J. Comput. Appl. Math. **207** (2007), no. 2, 186–191.

Libri

- [73] (with T. ZEULI), *Introduzione all'Analisi Numerica*, Editrice Tirrenia, Torino, 1965.
- [74] *Lezioni di Analisi Numerica*, Levrotto & Bella, Torino, 1971.
- [75] *Funzioni Speciali*, Unione Tipografico–Editrice Torinese, Torino, 1973.

Edizioni di Atti di Convegni

- [76] (with G. ALLASIA, W. GAUTSCHI, AND G. MONEGATO, eds.), *Special Functions: Theory and Computation* (Torino, 1984), Rend. Sem. Univ. Politec. Torino, Fasc. spec. (1985), pp. 1–334.
- [77] (with F. BREZZI, C. CANUTO, AND G. MONEGATO, eds.), *Numerical Methods in Applied Science and Industry* (Torino, 1990), Rend. Sem. Univ. Politec. Torino, Fasc. spec. (1991), pp. 1–261.