# Alessandro Terracini e la geometria differenziale proiettiva

ANNA MARIA FINO*

## 1. Introduzione

Nell'articolo esamineremo alcuni lavori di Alessandro Terracini in relazione alla geometria proiettiva differenziale, delineandone la rilevanza anche per le applicazioni successive. Consideremo solo una piccola parte dell'ampia produzione scientifica di Alessandro Terracini[1]. In particolare, ci concentreremo sui lavori in collegamento con le equazioni alle derivate parziali. Per la biografia scientifica di Terracini rimandiamo ai tre articoli iniziali di questo volume. Ci limitiamo a ricordare alcune date essenziali al fine di collocare temporalmente i lavori che prenderemo in considerazione.

Terracini frequentò l'Università di Torino dal 1907 al 1911 avendo come maestri alcuni fra i più importanti matematici dell'epoca (Corrado Segre, Enrico D'Ovidio, Gino Fano, Giuseppe Peano, Carlo Somigliana e Guido Fubini).

Nel 1911 si laureò con una tesi diretta da Corrado Segre su argomenti di geometria proiettiva differenziale, una parte della quale fu pubblicata sui «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo»[2]. Nel suo libro di ricordi Terracini scrive:

> Una menzione a sé vogliono la tesi di laurea, che Corrado Segre assegnava per scritto con una lunga e particolareggiata esposizione dello stato in cui si trovava la questione che il laureando doveva trattare. La mia verteva su argomenti vari di geometria proiettiva differenziale, la quale era allora ai primi albori. Tra l'altro dovevo stabilire una connessione tra due classi di varietà iperspaziali, riconducendo così l'uno all'altro due problemi che nel caso di una superficie erano stati studiati da Francesco Severi e Gaetano Scorza[3].

* Dipartimento di Matematica-Università di Torino; annamaria.fino@unito.it.

[1] Si veda la lista completa delle pubblicazioni in *Selecta*, vol. I, pp. XI-XXII.

[2] A. Terracini, *Sulle $V_k$ che rappresentano più di $\frac{k(k-1)}{2}$ equazioni di Laplace linearmente indipendenti*, in «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo», 33, 1912, 1, pp. 176-186.

[3] A. Terracini, *Ricordi di un matematico. Un sessantennio di vita universitaria*, Cremonese, Roma 1968.

Subito dopo la laurea divenne assistente alla cattedra di Geometria proiettiva. Durante la Prima guerra mondiale fu dapprima soldato semplice a Roma e poi, dopo aver conseguito la libera docenza, ufficiale del Genio a Gorizia e a Gemona. Terminata la guerra, dal 1919 al 1923, fu assistente e incaricato di Analisi algebrica presso l'Università di Modena. Nell'anno accademico 1923-1924 ebbe a Torino l'incarico di Geometria analitica. Nel 1924 vinse un concorso a cattedra e si trasferì per un anno a Catania. Dal 1925 al 1938 fu di nuovo a Torino sulla cattedra di Geometria analitica (poi Geometria analitica con elementi di proiettiva e descrittiva) e, per incarico, tenne il corso di Geometria superiore.

A causa delle leggi razziali del 1938 fu costretto ad allontanarsi dall'insegnamento e ad espatriare in Argentina, dove occupò una cattedra presso la Facoltà di Ingegneria dell'Università di Tucumán. Nel 1940 fondò, con Felix Cernuschi, la «Revista de Matemática y Fisica Teórica», alla quale collaborò anche Albert Einstein. Nell'ultimo periodo della sua permanenza, fu eletto presidente della Unión Matemática Argentina e, dopo la guerra, anche della Società italo-argentina. Solo nel 1948 ritornò a Torino, dove insegnò Geometria descrittiva, Geometria superiore e Geometria analitica con elementi di proiettiva e descrittiva fino al 1962, quando fu collocato a riposo e nominato professore emerito.

I suoi lavori principali riguardano in particolare i seguenti temi:

1. la geometria proiettiva differenziale (in particolare il suo famoso «Lemma» pubblicato sui Rendiconti del Circolo di Palermo[4] ed ancora ampiamente usato per studiare le varietà secanti e tangenti);
2 la relazione tra superfici immerse ed equazioni differenziali alle derivate parziali (in particolare lineari), proseguendo le ricerche sviluppate da Ernest J. Wilczynski.

## 2. Cenni sulle origini della Geometria proiettiva differenziale in Italia

In due lavori del 1906 e 1910 Corrado Segre introduce il nuovo campo della geometria proiettiva differenziale in iperspazi ed in particolare lo studio delle proprietà differenziali di varietà e l'interpretazione geometrica di sistemi di PDE lineari omogenee[5].

---

4. A. Terracini, *Sulle* $V_k$ *per cui la varietà degli* $S_h$ $(h + 1)$*- secanti ha dimensione minore dell'ordinario*, in «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo», 31, 1911, pp. 392-396.

5. C. Segre, *Su una classe di superficie degl'iperspazi legate colle equazioni lineari alle derivate parziali del 2° ordine*, in «Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino», 42, 1906-07, pp. 559-591.

Le idee che Segre introduce consistono nel determinare proprietà globali di varietà a partire da proprietà differenziali di natura locale, e si ricollegano a classici studi sull'analisi geometrica delle equazioni differenziali di Jean Gaston Darboux (1842-1917), sviluppata dal punto di vista geometrico-differenziale da Eugenio Elia Levi (1883-1917) e Luigi Bianchi (1865-1928) a Pisa.

Da queste idee e da quelle elaborate da Guido Fubini (1879-1943), prende il via la scuola italiana di geometria proiettiva differenziale, che annovera tra i suoi maggiori esponenti:

- Gino Fano (allievo di Segre);
- Alessandro Terracini (allievo di Segre);
- Beniamino Segre (allievo di Segre);
- Enrico Bompiani (allievo di Guido Castelnuovo).

## 3. Oggetto e problemi della Geometria proiettiva differenziale

La geometria proiettiva differenziale è lo studio della geometria differenziale, dal punto di vista delle proprietà di oggetti matematici come funzioni, diffeomorfismi e sottovarietà, che sono invarianti rispetto alle trasformazioni del gruppo proiettivo.

Si utilizza sia lo studio di invarianti in Geometria Riemanniana sia la caratterizzazione delle geometrie secondo il loro gruppo di simmetrie (programma di Erlangen), introdotto da Felix Klein, cioè lo studio delle proprietà che sono invarianti per un gruppo di trasformazioni.

All'inizio è stata studiata senza una teoria completa degli invarianti differenziali. Il primo invariante differenziale è la derivata di Schwarz, poi è stata introdotta la curvatura proiettiva di una curva piana. Fu Élie Cartan che formulò l'idea di una connessione proiettiva, come parte del metodo dei «moving frames». Una connessione proiettiva è un tipo di connessione di Cartan modellato sulla geometria dello spazio proiettivo.

Il metodo dei «moving frames» è un algoritmo per studiare le proprietà geometriche di sottovarietà e dei loro invarianti per l'azione di un gruppo di trasformazioni. Un esempio è dato dal riferimento di Frenet, in questo caso il gruppo di trasformazioni è quello delle rotazioni e traslazioni. Il metodo non era chiaro all'epoca in cui Cartan l'ha introdotto, è stato

C. Segre, *Le geometrie proiettive dei campi di numeri duali*, in «Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino», 47, 1911-12, pp. 114-133 e pp. 164-185.

Shiing-Shen Chern nel 1940 a rendere popolare il metodo all'interno della geometria.

Il problema principale della geometria proiettiva differenziale consiste nello studiare la geometria proiettiva differenziale locale dei punti lisci di una varietà proiettiva (algebrica) $X$ contenuta nello spazio proiettivo complesso $\mathbb{P}^{n+a}$, cioè lo studio del luogo di zeri di una famiglia finita di polinomi omogenei di $n+a+1$ variabili che generano un ideale primo.

Nello spirito di F. Klein, una proprietà di una varietà è geometrica se è invariante per trasformazioni proiettive.

ESEMPIO 1. La dimensione $\dim X$ di $X$, cioè la dimensione del suo spazio tangente in un punto liscio, ed il grado di $X$ (cioè il numero di punti di intersezione con uno spazio lineare generale di dimensione complementare) sono proprietà geometriche. La prima proprietà è intrinseca, la seconda è estrinseca, cioè dipende dall'embedding di $X$.

OSSERVAZIONE 1. Un modo per misurare la 'patologia' di $X$ è costruire nuove varietà $Y$ (ad esempio secanti e tangenti) e di calcolare la differenza tra la dimensione che ci si aspetta e la dimensione di $Y$.

### 3.1. La varietà secante come esempio modello

Dati due punti $x, y \in \mathbb{P}^{n+a}$, esiste un'unica retta proiettiva $\mathbb{P}^1_{xy}$ che li contiene.

**Definizione 1.** *Data una sottovarietà $X \subset \mathbb{P}^{n+a}$, la varietà secante di $X$ è la chiusura dell'unione di tutte le rette secanti a $X$, cioè*

$$\mathrm{Sec}(X) := \overline{\cup_{x,y\in X}\mathbb{P}^1_{xy}}$$

Ci si aspetta che $\dim \mathrm{Sec}(X) = 2n+1$, se $2n+1 \leq n+a$, oppure $\mathrm{Sec}(X) = \mathbb{P}^{n+a}$, se $2n+1 > n+a$.

Altrimenti si dice che $\mathrm{Sec}(X)$ è degenere e si indica con

$$\delta_\sigma := 2n+1-\dim \mathrm{Sec}(X)$$

il difetto della varietà secante di $X$.

Le varietà lisce $X$ di codimensione piccola con $\mathrm{Sec}(X)$ degenere hanno una ricca struttura geometrica.

ESEMPIO 2. (Varietà di Segre) Sia $V = \mathbb{C}^{k+1,l+1} \cong \mathbb{C}^{(k+1)(l+1)}$ lo spazio delle matrici complesse di ordine $(k+1)\times(l+1)$. La varietà di Segre

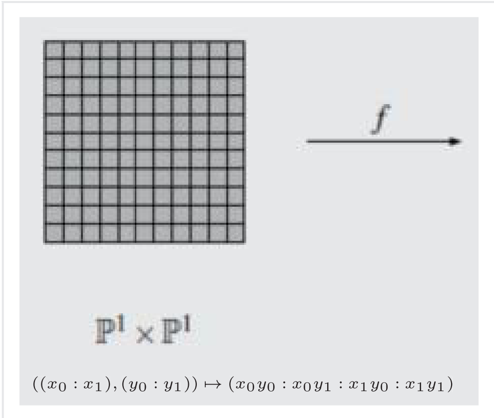


**Fig. 1: La quadrica liscia di $\mathbb{P}^3$.**

$X = \mathrm{Seg}(\mathbb{P}^k \times \mathbb{P}^l) \subset \mathbb{P}V$ è la proiettivizzazione delle matrici di rango 1 e consiste nel luogo degli zeri dei minori di ordine 2.

Si ha che $\mathrm{Sec}(X)$ è la proiettivizzazione delle matrici di rango $\leq 2$ e quindi $\dim \mathrm{Sec}(X) = 2(k+l) - 1$ . Pertanto $\mathrm{Sec}(X)$ è degenere con difetto $\delta_\sigma = 2$.

Il primo esempio di varietà di Segre è la quadrica liscia di $\mathbb{P}^3$ $f(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^3$ di equazione $w_0w_3 - w_1w_2 = 0$.

## 4. Lemma di Terracini e Classificazione per le varietà di Severi

Terracini ha trovato un risultato fondamentale per determinare le dimensioni delle varietà secanti

**Teorema 1** (Terracini).[1] *Se $X \subset \mathbb{P}^{n+a}$ è una varietà liscia di dimensione $n$ e $x, y$ sono due suoi punti distinti, allora*

*i) se $p$ appartiene alla retta secante $\mathbb{P}^1_{x,y}$ e $p \neq x, y$, allora*

$$span(T_xX, T_yX) \subseteq T_p \mathrm{Sec}(X),$$

*dove $T_p \mathrm{Sec}(X) \subseteq \mathbb{P}^{n+a}$ indica lo spazio tangente di Zariski alla varietà secante* $\mathrm{Sec}(X)$ *nel punto $p$.*

---

[6] A. Terracini, *Sulle $V_k$ per cui la varietà degli $S_h$ $(h+1)$- secanti ha dimensione minore dell'ordinario*, cit.

*ii) Per punti generici $x, y$ in $X$ e $p \in \mathbb{P}^1_{x,y}$ vale l'uguaglianza, cioè*

$$span(T_x X, T_y X) = T_p \operatorname{Sec}(X).$$

Una conseguenza importante del Lemma di Terracini è

**Teorema 1** (Zak).[7] *Se $X^n \subset \mathbb{P}^{n+a}$ è una varietà liscia di dimensione n, non contenuta in un iperpiano e $a < \frac{n}{2} + 2$, allora $Sec(X) = \mathbb{P}^{n+a}$.*

Se $n = 2$, $a = \frac{n}{2} + 2 = 3$ e $\operatorname{Sec}(X) \neq \mathbb{P}^5$, Severi ha provato che $X$ deve essere la superficie di Veronese, cioè l'immagine dell'embedding $\nu_2 : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^5$ dato da:

$$(x : y : z) \mapsto (x^2 : y^2 : z^2 : yz : xz : xy).$$

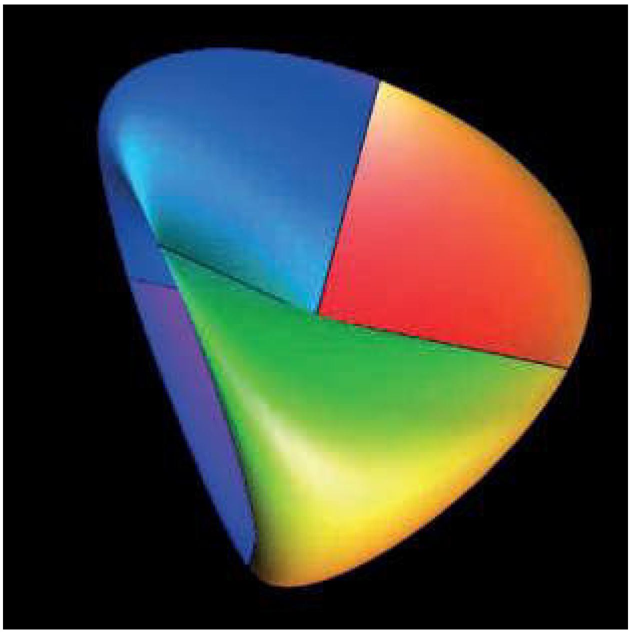

Fig. 2: La proiezione della superficie di Veronese come superficie di Roman Steiner.

[7] F.L. Zak, *Severi varieties*, in «Mathematics of the USSR-Sbornik», 54, 1986, pp. 113-127.

Più in generale

**Teorema 2 (Classificazione di Zak delle varietà di Severi).** [8] *Se* $X \subset \mathbb{P}^{n+a}$ *è una varietà liscia di dimensione n, non contenuta in un iperpiano,* $a = \frac{n}{2} + 2$ *e* $\mathrm{Sec}(X) \neq \mathbb{P}^{n+a}$*, allora X è*

1. $n = 2$*:* $X = v_2(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^5$ *(Superficie di Veronese);*
2. $n = 4$*:* $X = Seg(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^8$ *(Varietà di Segre);*
3. $n = 8$*:* $X = G(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^6) \subset \mathbb{P}^{14}$ *(Varietà Grassmanniana);*
4. $n = 16$*:* $E^{16} \subset \mathbb{P}^{26}$ *(Varietà di Cartan o* $E_6$*-varietà).*

Le precedenti quattro varietà sono dette varietà di Severi (che ha provato il caso $n = 2$) [9].

Le varietà di Severi sono tutte varietà omogenee complesse, cioè c'è un gruppo algebrico che agisce, e sono definite da equazioni quadratiche.

In generale, una sottovarietà $X$ di $\mathbb{P}^{n+a}$ è una varietà omogenea (o varietà razionale omogenea) se $X$ è l'orbita in $\mathbb{P}^{n+a}$ di un punto mediante l'azione di un sottogruppo $G$ del gruppo lineare complesso. Pertanto $X = G/P$, con $P$ sottogruppo parabolico di $G$.

OSSERVAZIONE 2. 1. Una varietà proiettiva omogenea è sempre la proiettivizzazione dell'orbita di un vettore peso massimale.

2. Ogni varietà Kähleriana omogenea compatta è della forma $G/P \times T$, dove $T$ è un toro complesso [10].

Una nuova dimostrazione del Teorema di Zak sulla classificazione delle varietà di Severi è stata trovata da J.M. Landsberg [11], utilizzando i risultati trovati da Terracini nel lavoro pubblicato sugli Atti della Società dei Naturalisti

8. F.L. Zak, *Severi varieties*, in «Mathematics of the USSR-Sbornik», 54, 1986, pp. 113-127; Id., *Tangents and secants of algebraic varieties*, in «Translations of Mathematical Monographs», vol. 127, Amer. Math. Soc., 1993; R. Lazarsfeld, A. van de Ven, *Topics in the geometry of projective space*, recent work by F.L. Zak, DMV Seminar 4, Birkhäuser Verlag, 1984; J.M. Landsberg, *On degenerate secant and tangential varieties and local differential geometry*, in «Duke Mathematical Journal», 85, 1996, no. 3, pp. 605-634.

9. F. Severi, *Intorno ai punti doppi impropri di una superficie generale dello spazio a quattro dimensioni e ai suoi punti tripli apparenti*, in «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo», 15, 1901, pp. 33-51; *Errata corrige*, *ibidem*, p. 160.

10 A. Borel, R. Remmert, *Über kompakte homogene Kählersche Mannigfaltigkeiten*, in «Mathematische Annalen», 145, 1962, pp. 429-439.

11 J.M. Landsberg, *On degenerate secant and tangential varieties and local differential geometry*, in «Duke Mathematical Journal», 85, 1996, pp. 605-634.

e Matematici [12].

I passi essenziali della dimostrazione di Landsberg sono infatti:

1. una descrizione infinitesimale della *patologia*;
2. l'uso della condizione sugli invarianti differenziali di $X$ trovata da Terracini in termini della seconda forma fondamentale proiettiva che in un punto liscio generico $p$ misura la *variazione* dello spazio tangente proiettivo di $X$ nell'intorno del punto.

## 5. Legame tra la geometria differenziale proiettiva e le Equazioni differenziali

L'interpretazione geometrica di una equazione alle derivate parziali del primo ordine risale ai lavori di Monge tra il 1780 al 1807, riassunti nel trattato [13] in cui Monge

1. caratterizza le superfici sviluppabili e di rotazione usando le equazioni alle derivate parziali;
2. definisce il piano tangente e normale ad una superficie;
3. caratterizza la superficie mediante il raggio di curvatura e l'inviluppo dei cerchi osculatori;
4. introduce il concetto di curve caratteristiche per la risoluzione di PDE del primo ordine.

In una serie di Memorie la cui pubblicazione incomincia nel 1901 Ernest Julius Wilczynski studia per primo in modo sistematico la geometria proiettiva differenziale ricorrendo a certi sistemi di equazioni differenziali lineari [14].

In generale per le superfici in $\mathbb{P}^3$ il metodo è molto complicato. Se si assume che le coordinate curvilineee $u$ e $v$ siano i parametri delle asintotiche, Wilczynski ottiene risultati fondamentali, tra cui la scoperta delle direttrici (una direttrice corrisponde alla normale, mentre l'altra è contenuta sul piano tangente).

---

[12] A. Terracini, *Alcune questioni sugli spazi tangenti ed osculatori ad una varietà*, I, II, III, in «Atti della Società dei Naturalisti e Matematici», 1913-14, pp. 214-247.

[13] G. Monge, *Application de l'analyse á la géométrie*, Bachelier, Paris 1850.

[14] E.J. Wilczynski, *Transformation of systems of linear differential equations*, in «American Journal of Mathematics», 23, 1901, pp. 29-36; Id., *Invariants of systems of linear differential equations*, in «Transactions of the American Mathematical Society», 2, 1901, pp. 1-24; Id., *Geometry of a simultaneous system of two linear homogeneous differential equations of the second order*, in «Transactions of the American Mathematical Society», 2, 1901, pp. 343-362.

L'idea di base è ridurre lo studio delle proprietà proiettive di una superficie a quello di alcune forme differenziali, cioè estendere alla geometria proiettiva i metodi di Gauss per la geometria metrica.

Al posto dell'elemento lineare di Gauss (prima forma fondamentale) della superficie si considera l'elemento lineare proiettivo di Fubini, cioè il quoziente di una forma cubica in $du$ e $dv$ (forma cubica di Darboux) e di una forma quadratica in $du$ e $dv$.

Una superficie $S$ in $\mathbb{P}^3$ può essere definita assegnando le coordinate omogenee di un punto $\mathbf{x} = (x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$ variabile su $S$ in funzione di 2 parametri $u$ e $v$.

Ricordiamo che una superficie $S$ in $\mathbb{P}^3$ è sviluppabile se e solo se tutti i punti di $S$ sono parabolici, cioè le due direzioni asintotiche coincidono.

Se $S$ è non sviluppabile, scegliendo come linee asintotiche le curve $u = cost$ e $v = cost$, si ha che le coordinate omogenee $x_i$ soddisfano un sistema

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{uu} = \theta_u \mathbf{x}_u + \beta \mathbf{x}_v + p_{11}\mathbf{x} \\ \mathbf{x}_{vv} = \gamma \mathbf{x}_u + \theta_v \mathbf{x}_v + p_{22}\mathbf{x} \end{cases}$$

analogo delle equazioni di Gauss-Codazzi.

Viceversa, ogni sistema di questo tipo determina una superficie $S$ riferita alle asintotiche, a meno di una proiettività.

L'elemento lineare proiettivo è

$$F_3/F_2 = \beta \frac{du^2}{dv} + \gamma \frac{dv^2}{du},$$

dove $F_2 = 2a\,du\,dv$ è la «metrica proiettiva» $F_3 = a(\beta du^3 + \gamma dv^3)$ è la forma cubica di Darboux e

$$a^2 = |\det(\mathbf{x}, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uv})|, \quad e^\theta = |a|.$$

In termini dei simboli di Christoffel le funzioni $\beta$ e $\gamma$ sono date rispettivamente da:

$$\beta = \Gamma_2^{11}, \quad \gamma = \Gamma_1^{22}.$$

Nei lavori tra il 1939 e 1944 Terracini ottiene varie interpretazioni geometriche delle equazioni caratteristiche di equazioni differenziali.

Ad esempio nel lavoro [15] Terracini dimostra l'esistenza di una superficie in uno spazio di dimensione 5, le cui linee principali sono rappresentate da

[15] A. Terracini, *Sobre la existencia de superficies cuyas lineas principales son dadas*, Union Matematica Argentina, 16, 1940, 22 pp.

una data equazione differenziale del primo ordine di grado 5, risolvendo un problema aperto proposto da Wilhelm Blaschke [16], in relazione ai sistemi di 5-webs di curve piane. Nel libro [17] A. Terracini scrive:

> È un lavoro che originariamente nell'inverno 1938-39, quando ancora pensavo alla possibilità di emigrare dall'Italia agli Stati Uniti, avevo redatto in inglese e inviato per la pubblicazione ad Annals of Mathematics, da cui me lo feci restituire prima che venisse pubblicato.

Per una superficie $S$ in uno spazio di dimensione 5, vi sono varie definizioni di curve principali. Nel lavoro di Segre *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi*[18] sono state definite nel seguente modo: tra gli $\infty^1$ iperpiani che intersecano la superficie $S$ in una curva che ha una cuspide nel punto generico $x$ ne esistono genericamente cinque per ciascuno dei quali il punto $x$ diventa un tacnodo; le relative tangenti sono le tangenti principali alla superficie $S$ nel punto $x$ (tangenti inviluppanti le linee principali). Successivamente, un'altra definizione equivalente è stata determinata da Bompiani nel lavoro *Sistemi coniugati sulle superficie degli iperspazi* come linee autoconiugate di seconda specie. Nei lavori pubblicati nei «Rendiconti della R. Accademia nazionale dei Lincei», nel 1921, Segre ha inoltre provato la caratterizzazione che le sole superfici in uno spazio di dimensione 5, per le quali sono indeterminate in ogni punto le 5 tangenti principali, cioè per cui tutte le linee sono linee principali, sono le superficie sviluppabili e la superficie di Veronese.

Le domanda proposta da Blaschke e risolta da Terracini era precisamente la seguente: data in modo arbitrario un'equazione differenziale con funzioni variabili come coefficienti, esiste una superficie la cui equazione definisce le sue curve principali?

---

[16] W. Blaschke, *Über die tangenten einer ebenen Kurve fünfter Klasse*, *Abh. d. mathem*, Seminar der Hamburger Universität, vol. 9, 1933. W. Blaschke, G. Bol, *Geometrie der Gewebe*, Berlin 1938.

[17] A. Terracini, *Ricordi di un Matematico*, cit.

[18] C. Segre, *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi*, in «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo», 30, 1910, pp. 87-121 e pp. 346-348.

[19] E. Bompiani, *Sistemi coniugati sulle superficie degli iperspazi*, in «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo», 46, 1922, pp. 91-104.

[20] C. Segre, *Le linee principali di una superficie di* $S_5$ *e una proprietà caratteristica della superficie di Veronese*, Nota I e II, in «Rendiconti della R. Accademia nazionale dei Lincei», 30, 1921, pp. 200-203; 227-231.

[21] E. Kasner, *Differential-geometric Aspects of Dynamics*, in «American Mathematical Society Colloquium Publications», vol. 3, part II, New York 1913 (reprinted 1934).

In generale, Edward Kasner[21] ha provato, che mediante una trasformazione puntuale da una superficie S ad un piano $\pi$, le $\infty^3$ traiettorie dinamiche di un campo di forza su $S$ sono rappresentate da un'equazione differenziale della forma

$$y''' = F(x,y,y') + G(x,y,y')y'' + H(x,y,y')y''^2$$

Molti problemi di geometria e fisica determinano equazioni del tipo precedente con la funzione $F(x,y,y')$ identicamente nulla.

Nel lavoro[22] del 1941 Terracini caratterizza proiettivamente le curve integrali dell'equazione differenziale ordinaria

$$y''' = G(x,y,y')y'' + H(x,y,y')y''^2,$$

considerata precedentemente da Kasner per studiare le traiettorie descritte da una particella di massa unitaria in un campo di forza.

Queste ricerche sulle equazioni differenziali sono poi state sviluppate successivamente da Enrico Bompiani. Nella prefazione al lavoro del 1946 Bompiani scrive:

> the projective theory of (ordinary and partial) differential equations to which Terracini made essential contributions is largely forgotten today, I believe, because of the lack of a written organic exposition. I believe that this publication will serve to rekindle interest in these questions, which have a strong geometrical flavor[23].

L'equazione di Monge-Ampère

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = f(x,y,u,u_x,u_y),$$

dove $u(x,y)$ è la funzione incognita, e $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$, fu introdotta da Gaspard Monge[24] in relazione al problema della ricerca di una superficie con curvatura assegnata.

Nel caso della curvatura di Gauss la funzione $f$ è data da

$$K(x,y)(1 + |\mathrm{grad}\, u|^2)^2.$$

---

[22] A. Terracini, *Sobre la ecuación diferencial* $y''' = G(x, y, y')y'' + H(x, y, y')y''^2$, Universidad Nacional de Tucumán, Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología, 3, 1941, pp. 195-234.

[23] A. Terracini, *Sulla geometria delle equazioni differenziali*, in «Annali di Matematica», 6th ser., 25, 1946, pp. 277-286.

[24] G. Monge, *Mémoire sur le calcul intégral des équations aux différences partielles*, in «Mémoires de l'Académie des Sciences», Imprimerie Royale, Paris 1784, pp. 118-192.

Nel lavoro del 1945 [25] Terracini ottiene un'interpretazione geometrica di un'equazione differenziale del secondo ordine di tipo Monge-Ampère in termini della geometria proiettiva. Più precisamente, usando le coordinate di Plücker, una retta dello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3$ è rappresentata in un punto della quadrica $Q_4$ di Klein di dimensione 4 di $\mathbb{P}^5$. Terracini prova che, se si forma utilizzando le rette della quadrica di Klein $Q_4$ una superficie rigata $R$ tale che, per ogni punto $P$ di una generatrice $g$ di $R$, il fascio delle rette tangenti a $R$ nel punto $P$ ha un fascio coniugato tangente a $R$, allora queste superfici rigate rappresentano le equazioni caratteristiche dell'equazione di Monge-Ampère.

In conclusione, notevoli sono soprattutto i contributi di Terracini nel settore della geometria differenziale proiettiva, nella quale ha lasciato un segno duraturo proseguendo le ricerche di Corrado Segre e Guido Fubini, ma altrettanto pregevoli risultano i suoi lavori sulla geometria delle equazioni differenziali.

[25] A. Terracini, *On the Monge-Ampére differential equations*, in «Publicaciones del Instituto de Matemáticas Universidad Nacional del Litoral. Rosario», 5, 1945, pp. 175-198.