L'infinito

Gabriele Lolli

Ma sedendo e mirando, interminati
Spazi di là da quella, e sovrumani
Silenzi, e profondissima quiete
Io nel pensier mi fingo; ove per poco
Il cor non si spaura.

Giacomo Leopardi (1798-1837)

L'aggettivo "interminati", nella poesia composta da Giacomo Leopardi nel 1818-19, è la traduzione letterale del greco apeiron [ἄπειρον], senza fine, senza limite, ma anche indifferenziato, indefinito. Così è proprio iniziata la storia dell'infinito: Anassimandro intorno al 610 a. C., a Mileto, immaginava che l'origine di tutte le cose fosse l'infinito (ἄπειρον), che con un movimento rotatorio centrifugo separava coppie di contrari.[1] E Aristotele (384-322) ha ripreso con cautela l'idea dell'infinito come principio: "A ragione tutti pongono l'infinito come principio; [...] dell'infinito non c'è principio, perché questo sarebbe il suo limite. Inoltre è ingenerato e incorruttibile, in quanto è un principio. Perciò, come diciamo, esso non ha un principio, ma sembra essere esso principio di tutte le altre cose e tutte abbracciarle e governarle, come dicono quanti non pongono altre cause oltre l'infinito".[2]

Da allora la storia dell'infinito ha avuto tante complicazioni, tante riprese, tante ripetizioni.[3] "Il cervello umano ha evidentemente una parzialità per

[1][Anassimandro 1958, p. 46]. Il frammento è di due righe; per interpretarlo si devono leggere le testimonianze degli antichi [ivi, pp. 25-45].

[2][Aristotele 1973, *Fisica*, III, 4, 203 b 6]. Non è chiaro quanto Aristotele condivida l'idea, se includa sé tra i tutti o riporti le opinioni prevalenti; certamente la corregge: "[L'infinito] non può essere un principio, lo è bensì ciò al quale viene attribuito".

[3]L'infinito rotatorio per esempio è richiamato nella teoria dei vortici dell'etere di René Descartes (1596-1650), con i suoi movimenti circolari. Fu confutata da Isaac Newton (1642-1727) nella Sezione IX del secondo libro dei *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687).

l'*infinito*, e accarezza con amore quell'illusione di idea. Sembra aspirare con appassionato fervore a questa impossibile concezione, nella speranza di credervi con la ragione quando l'avrà concepita", ha osservato Edgar Allan Poe (1809-1849) nella sua fantasia scientifica *Eureka*.[4] "['Infinito'], come 'Dio', 'spirito' e alcune altre parole che hanno equivalenti in quasi tutte le lingue, non è per nulla l'espressione di un'idea – ma di uno sforzo verso un'idea. [. . .] L'umanità aveva bisogno di un termine per mezzo del quale indicare la *direzione* di questo sforzo – la nuvola al di là della quale si trova, sempre invisibile, l'*obiettivo* di tale tentativo. Una parola, in sostanza, per mezzo della quale un essere umano potesse porsi in relazione immediata con un altro essere umano e con una certa *tendenza* dell'intelletto. Da questa esigenza è nata la parola 'infinito'; che è dunque la rappresentazione solo del *pensiero di un pensiero*".[5] Potrebbe essere la conclusione perfetta per un logico, ma prima volgiamo lo sguardo alla storia.

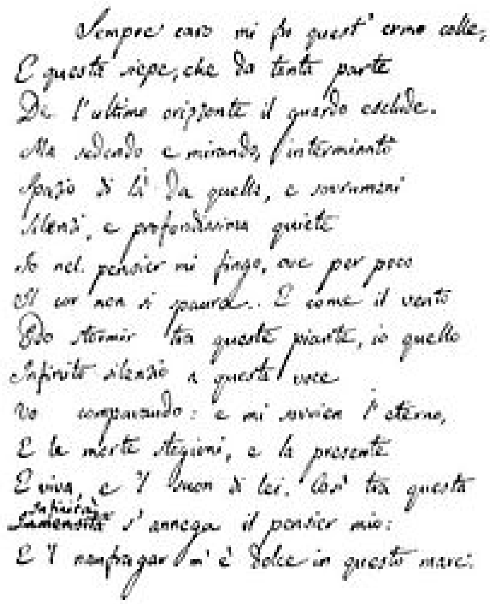

Sempre caro mi fu quest'ermo colle,
E questa siepe, che da tanta parte
De l'ultimo orizzonte il guardo esclude.
Ma sedendo e mirando, interminato
Spazio di là da quella, e sovrumani
Silenzi, e profondissima quiete
Io nel pensier mi fingo, ove per poco
Il cor non si spaura. E come il vento
Odo stormir tra queste piante, io quello
Infinito silenzio a questa voce
Vo comparando: e mi sovvien l'eterno,
E le morte stagioni, e la presente
E viva, e 'l suon di lei. Così tra questa
~~Immensità~~ Infinità s'annega il pensier mio:
E 'l naufragar m'è dolce in questo mare.

Figura 1: Secondo manoscritto de "L'infinito"

[4][Poe 1848, p. 280].
[5][Poe 1848, p. 222].

Ignaro del suggerimento di Poe, nel quarto secolo Aristotele si interroga anch'egli su come nasca tale idea e, dopo aver indicato alcuni motivi (divisibilità delle grandezze, e altri) ha una risposta sorprendente: "il motivo più importante e fondamentale della credenza che vi sia qualcosa di infinito sta nel fatto che esso provoca difficoltà nel pensiero di tutti e perciò, non potendosi l'infinito sopprimere nel pensiero, anche il numero sembra essere infinito, e così pure le grandezze matematiche".[6]

Aristotele affronta quindi il problema con la sua solita e proverbiale sistematicità, in particolare nel III libro della *Fisica*, ben consapevole che tutti quelli che hanno considerato la scienza della natura "hanno fatto parola dell'infinito",[7] e che "l'indagine che riguarda l'infinito presenta difficoltà, infatti sia a porre che esista, sia a porre che non esista, ci si imbatte in numerose contraddizioni [...] si pone inoltre la questione di cosa sia: se è sostanza o attributo a una qualche natura? [concluderà che non è sostanza]. In primo luogo bisogna, dunque, definire in quanti modi si dice infinito".[8] Aveva già stabilito che "l'ente si dice in molti modi".[9]

Considera vari significati: "In un senso, si dice infinito ciò che non si può percorrere, perché è per sua natura impenetrabile [...]; in un altro senso, ciò che presenta un percorso senza fine o che a malapena si può percorrere [...], ovvero ciò che per disposizione naturale presenta un percorso e un limite, ma poi in realtà, non si lascia raggiungere".[10]

Dopo Aristotele l'infinito si dice in due modi, infinito in potenza e infinito in atto.

L'infinito in atto dovrebbe essere un'infinità compiuta, che si presenta nella sua totalità in un momento ben determinato, mentre l'infinito potenziale è un processo che non ha mai fine. La conclusione dell'analisi di Aristotele è che "è impossibile che l'infinito sia in atto", con qualche oscillazione sulla quale non ci soffermiamo.[11]

[6] [Aristotele 1973, *Fisica*, III, 4, 203 b 22-25, p. 60]. La traduzione di Aristotele è sempre difficile e controversa; ringrazio Giuseppe Cambiano che mi ha segnalato la variante "a causa del non cessare nel pensiero, il numero ...".

[7] [ivi, III, 4, 203 a 2, p. 57].

[8] [ivi, III, 4, 203 b 30-204 a 4, p. 60].

[9] [ivi, I, 2, 185 a 21, p. 5].

[10] [ivi, III, 4, 204 a 5, p. 60].

[11] Per esempio: "Orbene come i punti non sono contigui gli uni agli altri, così pure gli avvenimenti passati lo sono: in entrambi i casi si tratta di oggetti indivisibili. In tal caso, neppure ciò che diviene risulta contiguo a ciò che è divenuto per la stessa ragione: in realtà, ciò che diviene è divisibile, mentre ciò che è divenuto risulta indivisibile. Ed allora

In realtà secondo Aristotele "capita che l'infinito sia proprio il contrario di quello che si dice. Difatti, l'infinito non è ciò al di fuori di cui non c'è nulla, ma [...] ciò da cui si può sempre prendere qualcosa, e quel che si prende, oltre che finito, è sempre diverso".[12]

Ma "l'infinito non è mai in potenza nel senso che possa diventare in atto una realtà esistente per se stessa: esso è infinito in potenza per il pensiero. Poiché dal fatto che non si trova mai la fine del dividere, si deduce che questo è un atto che ha una realtà puramente potenziale, non che l'infinito abbia una propria attuale esistenza".[13]

L'infinito potenziale, essendo inesauribile, si identifica con l'incompiuto, e quindi con l'imperfetto, come avevano già intuito i pitagorici; per questo la natura evita ciò che è infinito, privo della completezza a cui essa sempre tende. Invece per i matematici esso è l'ambiente privilegiato.

"È conforme a ragione che nella serie numerica il più piccolo sia il termine, ma che, procedendo verso un numero maggiore, ogni quantità venga sempre superata, e che nelle grandezze invece accada il contrario; difatti, procedendo verso il più piccolo, ogni grandezza è superata; procedendo, invece, verso il più grande, non c'è una grandezza infinita; [...] non essendo infinita alcuna grandezza sensibile, non è possibile che ogni grandezza determinata sia superata; ché allora, esisterebbe qualcosa di più grande del cielo. [...] Questo nostro discorso non intende sopprimere per nulla le ricerche dei matematici per il fatto che esso esclude che l'infinito per accrescimento sia tale da non poter essere percorso in atto. In realtà essi stessi, allo stato presente non sentono il bisogno dell'infinito (e in realtà non se ne servono), ma soltanto di una quantità grande quanto essi vogliono, ma pur sempre finita; di poi, col medesimo procedimento con cui si divide la grandezza massima, si può dividere ogni altra grandezza. Sicché, ai fini delle loro dimostrazioni, a loro non importerà affatto la presenza dell'infinito nelle grandezze reali".[14]

A conferma dell'affermazione "non sentono il bisogno dell'infinito ..." si usa rimandare agli *Elementi* di Euclide, nei quali il Postulato 2 recita:

---

il rapporto che sussiste tra la linea e il punto è lo stesso che sussiste tra ciò che diviene e ciò che è divenuto: all'oggetto che diviene sono infatti immanenti infiniti oggetti che sono divenuti", [Aristotele 1955, *Secondi Analitici*, II, 12, 95 b 5-10, pp. 382-3].

[12] [ivi, III, 6, 206 a 27, 207 a 1, pp. 67-8].

[13] [Aristotele 1959, *Metafisica* IX, 6, 1048 b 7, p. 305].

[14] [Aristotele 1973, *Fisica*, III, 7, 207 b 1-5, 15-21 e 29-32, pp. 70-1]. Tralasciamo la discussione sugli infinitesimi, collegata ai paradossi di Zenone, che porterebbe lontano, come anche quella del continuo.

"Estendere una retta [εὐθεῖα γραμμή] in modo continuo in una retta", dove retta è da intendere segmento come conferma il Postulato 1: "Tracciare una linea retta da un punto a un altro punto".[15]

Dopo Aristotele l'infinito da pensiero si trasforma in una persona, si identifica con Dio, e l'argomento diventa competenza di teologi, dogmatici ed eretici, un tema dunque pericoloso. S'introducono nuove determinazioni: "O Signore, tu non solo sei ciò di cui non si può pensare nulla di più grande, ma sei più grande di tutto quanto si possa pensare; poiché infatti è lecito pensare che esista qualcosa di simile. Se tu non fossi tale, si potrebbe pensare qualcosa più grande di te, ma questo è impossibile".[16]

Ma saltiamo la Scolastica e ricordiamo solo Giordano Bruno (1548-1600) e il suo tentativo di distinguere Dio dall'infinito attuale del mondo e del tempo:

- Dio è *tutto infinito*, perché ogni suo attributo è uno e infinito, e *totalmente infinito*, perché tutto lui è in tutto il mondo e in ciascuna sua parte infinitamente e totalmente,
- l'universo è *tutto infinito* perché non ha margine, ma non totalmente infinito perché ciascuna parte è finita: è totalmente in tutto e non in queste parti.[17]

Sarebbero allora tre i tipi di infinito, se non fosse che in Bruno sembra sbiadire la distinzione tra il tutto infinito e l'infinito potenziale. Il potenziale resta nella nostra immaginazione – secondo la descrizione che tanto piaceva a Italo Calvino:[18] "È questo un mondo e un grembo in certo modo insaziabile di forme e di specie [*mundus quidem et sinus inexplebilis formarum et specierum*], il quale non solo contiene le figure delle cose concepite esternamente secondo la loro reale grandezza e numero, ma per virtù dell'immaginazione

[15]Per quel che riguarda i numeri, il teorema di Euclide sull'infinità dei numeri primi (*Elementi* IX.20) afferma per la precisione: "I numeri primi sono più di ogni assegnata moltitudine di numeri primi". Anche dalla dimostrazione è evidente che la moltitudine è finita.

[16][Anselmo 1077/8, *Proslogion* 15, 235C]: "Domine, non solum es quo maius cogitari nequit, sed es quiddam maius quam cogitari possit. Quoniam namque valet cogitari esse aliquid huiusmodi: si tu non es hoc ipsum, potest cogitari aliquid maius te; quod fieri nequit".

[17][Bruno 1584b, p. 18], cvo. nostro.

[18][Calvino 2002, *Visibilità*, p. 102]: "attingere a questo golfo mai saturabile della molteplicità potenziale, lo *spiritus phantasticus* secondo Giordano Bruno, l'immaginazione come repertorio del potenziale, dell'ipotetico, di ciò che non è né stato né forse sarà che avrebbe potuto essere è indispensabile per ogni forma di conoscenza".

aggiunge altresì grandezza a grandezza, numero a numero. Ancora, come per natura da pochi elementi si compongono e germinano specie innumerevoli, così ad opera di questo principio efficiente intrinseco le forme delle specie naturali non solo vengono custodite in questo amplissimo grembo, ma potranno poi essere moltiplicate oltre ogni proporzione secondo la moltiplicazione delle immagini innumerevoli che si possono concepire, come quando ci raffiguriamo centauri alati, animali razionali alati, muovendo dalle immagini dell'uomo e del cervo, dell'uomo, del cavallo e dell'uccello; con una simile commistione possiamo ricavare infinite combinazioni da innumerabili elementi, ben più abbondanti delle dizioni che per via di combinazione e per diverse coordinazioni possono essere composte nelle varie lingue mediante il ristretto numero delle lettere alfabetiche".[19]

La differenza tra infinito potenziale e tutto infinito è nel soggetto conoscente: "Siccome la nostra immaginazione è potente di procedere in infinito, immaginando sempre grandezza dimensionale oltra grandezza e numero oltra numero, secondo certa successione e, come si dice, in potenzia, cossì si deve intendere che Dio attualmente intende infinita dimensione ed infinito numero".[20]

Per Bruno, come per tutti quelli che accettano o ipotizzano l'infinito attuale, questo, se esiste, è unico; lo riassume il Simplicio di Galileo nel suo modo rozzo ma efficace: "Ora questo darsi un infinito maggiore dell'infinito mi par concetto da non poter essere capito in verun modo".[21]

Vedere un solo infinito "ci estrica da innumerevoli labirinti come quello di avere un infinito minore ed un altro maggiore nell'immensitudine dell'universo" e quelli di "alcuni teologi [che] dall'eternità del tempo vogliono inferire lo inconveniente di tanti infiniti maggiori l'uno dell'altro, quante possano essere specie di numeri".[22]

Se ci fossero stati dei teologi che sostenevano tanti infiniti maggiori l'uno dell'altro, questa sarebbe stata un'anticipazione clamorosa, che avrebbe tolto a Cantor, come vedremo, la sua maggior gloria.

Ma gli argomenti contrari alla molteplicità di infiniti segnalavano tuttavia piuttosto la contraddizione di questa ipotesi con la nozione comune 5 di Euclide, che afferma che il tutto è maggiore della parte. "La parte può essere

[19][Bruno 2009, pp. 538-541], *De subiecto imaginum*, XIII capitolo di *De imaginum, signorum et idearum compositione* (1591).

[20][Bruno 1584b, Dialogo secondo, p. 22].

[21][Galileo 1638, *Discorsi*, p. 43].

[22][Bruno 1584b, Dialogo secondo, p. 31].

uguale o non minore del suo tutto; ciò accade ogni qualvolta una parte del tutto è infinita [...]. – osservava William Ockham (1290-1350) in *Questiones in quator libros sententiarum* (1318) – Così in tutto l'Universo non ci sono punti in numero maggiore che in una fava, perché in una fava ci sono infinite parti. Sicché il principio che il tutto è maggiore della parte vale soltanto per tutti i composti di parti integranti finite".

Analogamente Nikolaus Krebs von Kues (Nicolaus Cusanus) (1400-1464) aveva segnalato nella *Dotta ignoranza* che in una linea infinita i segmenti lunghi un piede sono tanti quanti i segmenti lunghi due piedi. Il numero dei segmenti è di fatto il numero dei loro estremi, in una successione numerabile, pensando a un ricoprimento della linea.

Bruno riprende l'esempio: "Sotto la comprensione dell'infinito non è parte maggiore e parte minore, perché alla proporzione dell'infinito non si accosta più una parte quantosivoglia maggiore che un'altra quantosivoglia minore; e però nell'infinita durazione non differisce la ora dal giorno, il giorno da l'anno, l'anno dal secolo, il secolo dal momento; perché non sono più gli momenti e le ore che gli secoli, e non hanno maggior proporzione quelli che questi a l'eternità. Similmente nell'immenso non è differente il palmo dal stadio, il stadio da la parasanga.[23] [...] Dunque infinite ore non son più che infiniti secoli, e infiniti palmi non son di maggior numero che infinite parasanghe".[24]

Gli esempi addotti per provare che nell'infinito la parte non è minore del tutto insistono sul fatto che i sottoinsiemi, diremmo noi, infiniti di un infinito sono tutti uguali tra loro e all'ambiente che li contiene; evidentemente la loro immaginazione dell'infinito, così orientata fin dal tempo di Aristotele, era quella che noi chiamiamo idea del numerabile, l'infinito più piccolo, quello dei numeri naturali, ancorché in atto, dove ogni parte o è finita o equivalente al tutto; dell'infinito del continuo non avevano invece alcuna immaginazione, o non una univoca.

A proposito dei teologi che volevano "inferire lo inconveniente di tanti infiniti maggiori l'uno dell'altro", Elpino nel dialogo di Bruno precisa: "Particolarmente di quello, che fa al proposito nostro de gl'infiniti passi ed infinite miglia, che verrebono a fare un infinito minore ed un altro infinito maggiore

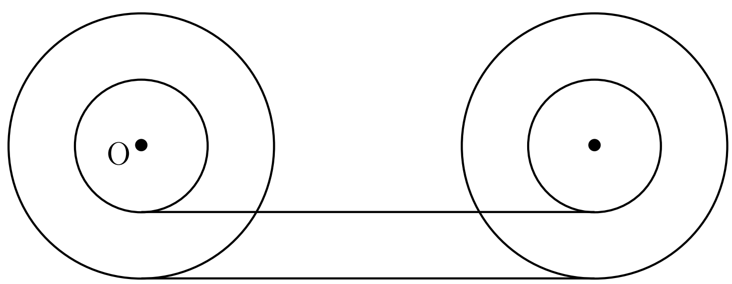
[23][Misura di lunghezza della Persia antica, a noi nota nella forma greca (in Erodoto e soprattutto in Senofonte), παρασάγγης. L'uso delle misure in Erodoto ci permette di ragguagliare la sua parasanga a poco più di 6 km (6300 m), cioè 30 stadi.]

[24][Bruno 1584a, Dialogo quinto, p. 145]; e anche con parole analoghe [Bruno 1584b, Dialogo secondo, p. 31].

nell'immensitudine de l'universo".[25]

Con un diverso argomento, Galileo (1564-1642) concluderà: "Io non veggo che ad altra decisione si possa venire, che a dire, infiniti essere tutti i numeri, infiniti i quadrati, infinite le loro radici, né la moltitudine de' quadrati essere minore di quella di tutti i numeri, né questa maggiore di quella, ed in ultima conclusione, gli attributi di eguale maggiore minore non aver luogo ne gl'infiniti, ma solo nelle quantità determinate".[26]

Nel corso dei secoli si sono accumulate diverse osservazioni su proprietà dell'infinito, quelle che furono chiamate paradossi. Ad Aristotele è attribuito, con dubbi e nessun riscontro, che due ruote concentriche, l'una fissata rigidamente dentro l'altra, devono avere la stessa circonferenza perché facendo un giro completo coprono la stessa distanza.

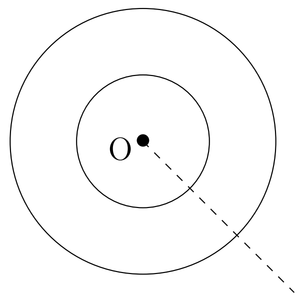


Evangelista Torricelli (1608-1647) lo dirà in altro modo, in riferimento non alla lunghezza ma al numero di punti: due circonferenze concentriche hanno lo stesso numero di punti.[27]

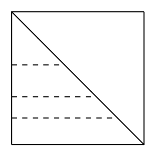
[25] [Bruno 1584b, p. 31].

[26] [Galileo 1638, p. 45].

[27] In questo caso la lunghezza di un segmento e il numero di punti dello stesso portano alla stessa conclusione; ma i due concetti sono distinti; ricordiamo che per Aristotele il continuo non era un insieme di punti. La confusione tra i due concetti sarà fonte di altri paradossi, ancora nell'Ottocento, con segmenti di lunghezza diversa ma lo stesso numero di punti.



Roger Bacon (1214-1292) aveva notato la corrispondenza biunivoca tra lato e diagonale del quadrato:[28]



e Galileo la corrispondenza biunivoca tra tutti i numeri e i numeri quadrati:[29]

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & \dots \end{array}$$

Erano tutti o contrari all'infinito attuale o agli infiniti come quantità determinate, come numeri.[30]

Ma i paradossi più sorprendenti, e angoscianti, erano quelli trovati da chi nell'infinito attuale, universo o Dio, credevano. Da quello di Bruno, che "infinite ore non son piú che infiniti secoli, e infiniti palmi non son di maggior numero che infinite parasanghe", segue che "[a]lla proporzione, similitudine, unione e identità de l'infinito non piú ti accosti con essere uomo che formica, una stella che un uomo [...] ed in lui [infinito] non è differente l'atto da la potenza. Se dalla potenza non è differente l'atto, è necessario che in

[28] *Opus Maius*, 1233.

[29] [Galileo 1638, *Discorsi*, p. 43].

[30] Contro i numeri infiniti Aristotele invocava l'annichilimento del numero: la somma di un qualunque numero finito e di un eventuale numero infinito sarebbe sempre uguale a quest'ultimo.

quello il punto, la linea, la superficie e il corpo non differiscano: perché cossí quella linea è superficie, come la linea, movendosi, può essere superficie; cossí quella superficie è mossa ed è fatta corpo. È necessario dunque che il punto nell'infinito non differisca dal corpo, perché il punto, scorrendo da l'esser punto, si fa linea; scorrendo da l'esser linea, si fa superficie; scorrendo da l'esser superficie, si fa corpo; il punto dunque, perché è in potenza ad esser corpo, non differisce da l'esser corpo dove la potenza e l'atto è una medesima cosa.[31] Dunque, l'individuo non è differente dal dividuo, il simplicissimo da l'infinito, il centro da la circonferenza". La sfera perfetta, simbolo dell'essere, si trasforma in incubo quando diventa infinita: "Se il punto non differisce dal corpo, il centro da la circonferenza, il finito da l'infinito, il massimo dal minimo, sicuramente possiamo affermare che l'universo è tutto centro, o che il centro de l'universo è per tutto e che la circonferenza non è in parte alcuna per quanto è differente dal centro, o pur che la circonferenza è per tutto, ma il centro non si trova in quanto che è differente da quella".[32]

Jorge L. Borges (1899-1986) ha cercato di ricostruire la storia della sfera infinita e del centro, con qualche omissione. Non ha rilevato un'anticipazione che si trova in Publio Elio Aristide (117-189), retore della nuova sofistica, che nell'elogio di Roma (Εις Ρώμην) dichiara: "Come le altre città hanno le loro frontiere e il loro territorio, questa città ha per frontiere e per territorio l'intero mondo abitato".[33]

Secondo Borges,[34] Hermes Trismegisto era creduto responsabile di aver dettato i libri che formavano il *Corpus Hermeticum*, in realtà compilati o forgiati a partire dal III sec, d. C.; Alain de Lille nel XII secolo trovò ivi

[31][Potenza e atto, spiega Bruno, sono la medesima cosa perché nell'infinito le cose particolari non sono differenti, non sono specie come uomo e formica, e l'universo è dunque uno e immobile, non ha in sé mutazione alcuna.]

[32][Bruno 1584a, Dialogo quinto, pp. 145-6].

[33][Aristide 155, 59-61]. Se la frontiera coincide con il territorio il centro non è in nessun luogo. Ringrazio Carlo Ossola di avermi segnalato questo testo. Aristide descrive tra l'altro il commercio internazionale che fa capo a Roma, vero laboratorio generale della terra, dove sono tante le navi che giungono da ogni parte della terra "da presumersi che ormai agli [altri] popoli gli alberi siano rimasti spogli, e che anche loro debbano venire qui a cercare i loro stessi prodotti, se ne hanno bisogno [. . .]. E veramente si può dire, come diceva Esiodo degli estremi confini dell'Oceano – che c'è un luogo dove tutto confluisce in un unico principio e in un'unica fine – che qui tutto converge, commerci, navigazioni, agricoltura, metalli lavorati, tutte quante le arti che ci sono o che ci sono state, tutto quanto è prodotto e generato dalla terra" [ivi, 11-13].

[34][Borges 1952a].

l'affermazione: "Dio è una sfera intellegibile, il cui centro sta dappertutto e la cui circonferenza in nessun luogo". L'immagine ricompare nel XIII sec. nel *Roman de la Rose*, che l'attribuisce a Platone, e nell'enciclopedia *Speculum Triplex*; nel XIV sec. l'ultimo capitolo del *Pantagruel* allude a "quella sfera intellettuale, il cui entro sta dappertutto e la cui circonferenza in nessun luogo, che chiamiamo Dio". Borges dimentica il Cusanus, che parlava della macchina del mondo, "che ha il centro ovunque, e la circonferenza in nessun luogo", di nuovo ripreso da Bruno. Infine Pascal: "Tutto il mondo visibile non è che un tratto impercettibile nell'ampio seno della natura. Nessuna idea vi si avvicina. Sforziamo pure le nostre concezioni al di là degli spazi immaginabili, non partoriamo che atomi, a fronte della realtà delle cose. È una sfera infinita, il cui centro è in ogni dove e la cui circonferenza in nessun luogo",[35] ma anche "[...] una sfera spaventosa, il cui centro [...]" nell'edizione critica di Tourneur (Parigi, 1941), se possiamo fidarci di Borges.[36] Ma con Pascal siamo arrivati al tempo in cui i matematici hanno preso in mano la questione.

I matematici, come tutti sanno, sono come i francesi, diceva Johann Wolfang Goethe (1749-1832): non appena si dice loro qualcosa essi la traducono nella propria lingua, e questa appare subito diversa.[37]

Da quando François Viète (1540-1603) nel 1593 usò per la prima volta una espressione infinita (indicata ora dai puntini, ma allora da *etc*)[38] nella celebre formula:[39]

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdot \ldots$$

si scatenò un'orgia di paradossi relativi alle serie e ai prodotti infiniti, nelle origini del calcolo infinitesimale.

[35][Pascal 1670, cap. I.84, p. 1105].

[36][Borges 1952a, p. 914], cita la frase di Pascal come "La natura è una sfera ..."; l'edizione di Zacharie Tourneur dovrebbe essere presso Vrin, Paris, 1942.

[37][Goethe 2006, *Maxime und Reflexionen*, n. 1279].

[38]Precisamente di solito "&c", ma anche "etc", o i puntini in T. Watkins nel 1714, o ...&c, o ...$\backsim$ in J. Schultz nel 1783, $\backsim$ probabilmente per l'∞ di Wallis (si veda sotto). Il simbolo di sommatoria $\sum$ introdotto da Euler fu usato dapprima raramente, poi più frequentemente solo dopo Fourier nel 1829, fino a $\sum_0^\infty$ da A. Pringsheim alla fine dell'Ottocento. Si veda [Cajori 1928-29].

[39]Deriva da $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}$ che iterata ripetutamente a destra su sin permette di scrivere $\frac{\sin(x)}{2^n\sin(\frac{x}{2^n})} = \prod_{i=0}^{n-1}\cos(\frac{x}{2^i})$ e quindi con alcuni calcoli e sostituzioni appropriate, e ricordando $2\cos(\frac{x}{2}) = \sqrt{2+2\cos x}$ e $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(y)}{y} = 1$ si arriva facilmente alla formula.

Influenzati come siamo dalla storia e dall'ideologia successiva, noi pensiamo che il concetto portante del calcolo fosse quello di limite e quindi in un certo senso una conferma dell'infinito potenziale. Anche Georg Cantor (1845-1918) scrivendo nell'Ottocento avanzato, ed evidentemente sotto l'impressione dell'opera di rigorizzazione, iniziata da Augustin Louis Cauchy (1789-1857) e che aveva portato con il suo maestro Karl Weierstrass (1815-1897) a fondare il calcolo sulla definizione di limite, riconosceva: "Mi pare che l'infinito matematico, per quanto ha fin qui trovato un'applicazione riconosciuta alla scienza, ed ha contribuito alla sua propria utilizzazione, si presenti in primo luogo nell'interpretazione di una variabile crescente sopra ogni limite o decrescente nell'arbitrariamente piccolo, e che si trovi però sempre come grandezza che permane finita. Chiamo questo tipo di infinito improprio [*Uneigentlich-Unendliches*]".[40] A questa funzione si era ridotto, smitizzato, l'infinito potenziale, addirittura "improprio".

In verità, innanzi tutto nelle origini del calcolo intervengono in modo fondante gli infinitesimi, che sono per così dire gli inversi degli infiniti, ereditati da Archimede (287-212) attraverso Bonaventura Cavalieri (1598-1647). Newton parlando in terza persona ricorda: "[...] dai Momenti del Tempo egli diede il nome di Momenti agli incrementi momentanei, o Parti infinitamente piccole dell'Ascissa e dell'Area, generate in Momenti di Tempo. Il Momento di una Linea egli chiamò Punto, nel senso di Cavallerius, benché non sia un Punto geometrico ma una Linea infinitamente corta, e il Momento di un'Area o Superficie egli chiamò Linea, nel Senso di Cavallerius, benché non sia una Linea geometrica, ma una superficie infinitamente stretta".[41]

Le quantità fluenti di Newton, *in statu nascenti*, nella loro prima origine o esistenza, avanti che diventino particelle finite, sono come i primordi del mondo vegetale. Il vescovo George Berkeley (1685-1753) aveva buon gioco di fare ironia sugli "incrementi evanescenti", e ridicolizzare le quantità "né finite né infinite né tuttavia nulle. Non dobbiamo chiamarle fantasmi di quantità svanite?". Secondo Berkeley "la nostra immaginazione, che è una facoltà derivata dal senso, è incapace di formarsi una idea chiara delle minime particelle di tempo".[42]

Inoltre le serie infinite, fondamentali nelle ricerche di Newton, anche se calcolate come limite delle somme parziali, era difficile considerale potenziali,

[40] [Cantor 1883].
[41] [Newton 1722, trad. it. pp. 23-4]. Cavallerius è Cavalieri.
[42] [Berkeley 1734, pp. 66-7].

perché per arrivare alla somma tutti i termini davano il loro contributo.

L'operazione di passaggio al limite comunque non è altro che il metodo di esaustione di Eudosso, del iv sec. a. C., di cui Aristotele sospettava, per la sua ambiguità: è vero che il limite di una successione non corrisponde a un numero della successione maggiore di tutti, ma l'operazione presuppone che la totalità dei numeri sia data.

A una definizione di limite si opponeva comunque la mancanza di una teoria dei numeri reali, che iniziavano appena a essere concepiti con la rappresentazione decimale, ma non terminata nel caso di numeri irrazionali. Lamentava Michael Stifel (1487-1567): "Quando cerchiamo di assoggettarli a numerazione [forma decimale] [. . .] troviamo che essa sfugge via continuamente [cioè non termina] così che nessuno [di tali numeri] può essere preso in sé in modo preciso. Ora non si può definire definire vero numero ciò la cui natura manca di precisione. [. . .] Quindi proprio come un numero infinito non è un numero, così anche un numero irrazionale non è un vero numero, ma qualcosa che si cela in una sorta di nuvola d'infinità". [43]

In geometria e nella teoria delle funzioni infine si incominciava a parlare di un tipo di infinito più determinato. Lo stesso Cantor citato prima ricordava che nello studio delle funzioni complesse è divenuto necessario immaginarsi nel piano un unico punto giacente all'infinito, ma ben definito. "Risulta che il comportamento della funzione in prossimità del punto infinitamente lontano, ha le stesse caratteristiche che presso ogni altro punto posto nel finito; così si giustifica l'idea che in questo caso l'infinito debba essere concentrato in un punto ben determinato". In una tale forma, lo chiama infinito proprio [*Eigentlich-Unendliches*], proponendosi così di aggiornare la terminologia di Aristotele. "Teniamo ben distinti – per la comprensione del seguito – questi due modi di presentarsi dell'infinito matematico che hanno prodotto, in ambedue le forme, i più grandi progressi nella geometria, nell'analisi e nella fisica matematica".

E nel Settecento Leonhard Euler (1707-1783) identificava con spregiudicatezza serie e polinomi, come se avessero le stesse proprietà (per esempio la possibilità di cambiare l'ordine degli addendi), e usava numeri infiniti assegnando loro proprietà uguali o diverse da quelle dei numeri finiti a seconda della convenienza.

L'infinito ad ogni modo aveva ormai una sua notazione matematica: ∞.

[43] [Stifel 1544, p. 103].

$$\infty$$

Figura 2: Simbolo introdotto da Wallis.

Il simbolo introdotto nel 1655 da John Wallis (1616-1703), con un largo immediato successo, si usa ora chiamare lemniscata, dalla curva omomorfa, descritta da Jakob Bernoulli nel 1694.[44] Ma probabilmente Wallis adottò il simbolo che nella tarda romanità era usato per 1000, non M ma la figura dell'onciale CIↃ.[45] In Euler e altri la figura non era chiusa, ma un $\backsim$ un po' più uncinato.

Il simbolo era usato anche per l'infinito proprio, e compariva in scritture come $f(\infty) = b$, o $f(a) = \infty$. E Wallis aveva presentato il simbolo dicendo: "Esto enim ∞ nota numeri infiniti".

A parte lo spregiudicato Euler, tuttavia, i matematici più importanti continuavano ad accettare solo l'infinito dei limiti. Carl Friedrich Gauss (1777-1855), ancora nel 1831 in una lettera del 12 luglio a Heinrich Christian Schumacher (1780-1850) scriveva: "Io devo protestare con forza contro l'uso di una quantità [*Grösse*] infinita come qualcosa di *completo*: questo non è permesso in Matematica. L'infinito è solo una *façon de parler*, laddove in modo preciso si dovrebbe parlare di limiti".[46]

Forse non c'è stato un altro periodo nella storia della matematica così turbolento, pieno di assurdità in contraddizione tra loro e nello stesso tempo così produttivo ed esaltato, teso verso un premio che si sentiva a portata di mano al punto da non preoccuparsi di contraddizioni e insensatezze pur di mostrare che i metodi funzionavano.

Per andare oltre l'ortodossia, e fare chiarezza, si è dovuto aspettare la seconda metà dell'Ottocento con Richard Dedekind (1831-1916) e Georg Cantor.

L'idea corrente, allora come ora, era che il finito sia dato, che sia quello che si vede intorno a noi, a dimensione umana, e l'infinito sia estrapolato,

[44] Luogo dei punti per i quali il prodotto delle distanze da due punti fissi è costante, di equazione $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$; il nome deriva dal latino *lemniscus*, fiocco o nastro ornamentale pendente; la curva è un caso particolare dell'ovale di Cassini (1680).

[45] [Cajori 1928-29, par. 441, pp. 44-6 del secondo volume]. Il simbolo ∞ nel misticismo moderno è stato anche assunto come rappresentazione dell'uroburo.

[46] Lettera a Schumacher, [Gauss 1863-1929, vol. 8, p. 216] o [Gauss 1860, p. 269].

passando attraverso l'infinito potenziale, e poi eventualmente attualizzandolo. Comunque l'infinito viene per negazione: nell'apeiron [ἄπειρον] c'è un' "a" privativa, di negazione, di mancanza di limite, o di confine, o di forma. In matematica, "infinito" era definito come "non finito": "Chiamerò *molteplicità infinita* ogni molteplicità che è più grande di ogni molteplicità finita".[47] Ma questa definizione di finito è circolare: se finito è ciò che si può contare, per capire cosa vuol dire finito occorre sapere che cosa sono i numeri naturali, detti appunto anche numeri di conto; e l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ è infinito, nessuno era riuscito a darne una definizione prima di Dedekind in *Was sind und was sollen die Zahlen* nel 1888. Né si può pensare che si costruiscano strada facendo; per costruirli bisogna che, ogni volta che se ne produce uno nuovo, si sappia quale è la natura, o il genere dei numeri.

Da questa *impasse* esce Dedekind rovesciando l'ordine di priorità, e proponendo una definizione positiva di infinito, non privativa, non dipendente da quella dei numeri o dei limiti:

- infinito è un insieme che si proietta dentro di sé.

"Proiezione" è un concetto matematico: deve essere una funzione che tiene distinti i distinti, cioè iniettiva, ed essere proprio un proiettare dentro, in una parte propria, cioè non essere suriettiva.[48]

Quando Galileo notava che a ogni numero naturale si può far corrispondere il suo quadrato stava indicando una proiezione di $\mathbb{N}$ in sé, in una parte propria. Questa proprietà degli insiemi infiniti era nota, come abbiamo visto, e considerata paradossale.

Come in Anassimandro, con Dedekind l'infinito torna ad essere il principio.

L'infinito di Dedekind si chiama anche riflessivo, per distinguerlo da quello definito in modo negativo. Poiché finito e infinito sono uno la negazione dell'altro, è il finito ora che viene ad avere una definizione negativa:

- finito$_1$ $=_{Def}$ non riflessivo, mentre

[47] [Bolzano 1851, 9, p. 5]. Gli esempi si potrebbero moltiplicare: ancora nel 1898 per Émile Borel (1871-1956) dire che A è infinito significa dire che dato un numero qualunque n, A contiene più di n elementi.

[48] [Dedekind 1888, § 5 Definizione 64, trad. Gana p. 98], con terminologia diversa ("sistema", invece di insieme, "rappresentazione [*Abbildung*] simile" per funzione iniettiva). La definizione si trova già nella prima versione del 1872 di [Dedekind 1888]. Cantor cercherà di avanzare una pretesa di priorità, ma Dedekind rivendicherà con ragione che se molti, da Cantor a Bernhard Bolzano (1781-1848), avevano dato una posizione privilegiata a tale proprietà, perché da essa seguono tante altre, nessuno l'aveva presa come definizione.

- finito$_2$ $=_{Def}$ contato da un numero naturale

e analogamente

- infinito$_1$ $=_{Def}$ riflessivo,
- infinito$_2$ $=_{Def}$ non finito$_2$.

Si può dimostrare che riflessivo = non finito$_2$? Sì, ma con un tipo di ragionamento a lungo controverso, come per altre leggi dell'infinito (si assume che esistano insiemi o funzioni che non sono definibili, assioma di scelta per chi sa).[49]

Una volta rotto il tabù, si sono trovate anche definizioni dirette di "finito" che non fanno riferimento ai numeri, molto ingegnose. Dopo essersi accorto con meraviglia che si può definire l'infinito senza fare riferimento ai numeri naturali, Cantor caratterizzava, dal 1887, gli insiemi finiti come quelli per cui esiste un unico buon ordine.[50]

La definizione più interessante, perché non si basa né sulla nozione di ordine né su quella di cardinalità, ma si esprime solo mediante famiglie di insiemi, ed è quindi quella più genuinamente insiemistica, è dovuta ad Alfred Tarski (1902-1983); essa permette di dimostrare tutte le proprietà degli insiemi finiti, e molte equivalenze con altre definizioni, senza usare l'assioma di scelta.

- Un insieme X è finito se e solo se ogni famiglia non vuota di sottoinsiemi di X ha un elemento minimale,

dove "minimale" si intende rispetto all'inclusione propria $\subset$ tra insiemi, vale a dire un elemento della famiglia tale che nessun altro è propriamente incluso in esso. La definizione è poco intuitiva, ma equivalente a quella di non riflessivo.

La proiezione in sé è la madre di tutte le antinomie. Abbiamo visto come, quando riconosciuta possibile, fosse ritenuta maravigliosa o inquietante. La più famosa delle antinomie, quella di Bertrand Russell (1872-1970) nasce da un tentativo di Russell di correggere la dimostrazione di Cantor, che riteneva sbagliata, sull'esistenza di infiniti arbitrariamente grandi (1891); è di fatto un adattamento di quella dimostrazione.[51]

[49] Se ne è accorto per primo Rodolfo Bettazzi (1861-1941).

[50] O, secondo P. Stäckel (1862-1919) nel 1907, come quelli che hanno un buon ordine tale che anche l'inverso è un buon ordine. Un buon ordine è una relazione d'ordine totale tale che ogni sottoinsieme non vuoto ha un minimo. Per altre definizioni di "finito" si veda [Lolli 2008, cap. 4.5, pp. 127-33].

[51] Pure gli altri paradossi, che non discutiamo, l'incompletezza, i problemi indecidibili, . . . , dipendono da una proiezione in sé.

La teoria costruita da Cantor, teoria dell'infinito all'interno della teoria degli insiemi, provoca uno sconvolgimento nelle credenze radicate in una tradizione più che millenaria.

Primo sconvolgimento: l'infinito attuale non è, come quello potenziale, negazione del finito; ha una definizione, o essenza per dirlo all'antica, positiva.

Secondo sconvolgimento: l'infinito attuale non è uno, ce ne sono almeno due, uno maggiore dell'altro.

Nel 1874 Cantor, che fino ad allora era stato un analista, studiava le serie trigonometriche, e aveva dato una delle definizioni dei numeri reali $\mathbb{R}$ nel 1872, per le esigenze delle sue ricerche, dimostra che la varietà dei numeri reali (*Mannigfaltigkeit*, allora non si diceva ancora "insieme"), a differenza di quella dei numeri razionali, e quella dei numeri algebrici, non può essere messa in corrispondenza biunivoca (iniettiva e suriettiva) con la varietà dei numeri naturali. Il primo a esserne sorpreso fu proprio forse Cantor: "Ne concludo che tra le collezioni e gli insiemi di valori esistono differenze di essenza, che fino a poco fa io non potevo indagare.[52]

Esistono dunque almeno due cardinalità distinte, quella del numerabile (di $\mathbb{N}$, degli interi $\mathbb{Z}$, dei razionali $\mathbb{Q}$, degli algebrici) e quella del continuo (di $\mathbb{R}$, dei complessi $\mathbb{C}$), se si conviene che due insiemi hanno la stessa cardinalità se e solo se esiste tra di loro una corrispondenza biunivoca, o uno-uno.[53]

Terzo sconvolgimento: gli infiniti attuali non sono solo due, ma per ognuno di essi ce ne è uno maggiore, senza fine.

---

[52][Cantor e Dedekind 1937, p. 16]. Un'altra scoperta di Cantor, nel 1978, fu la corrispondenza biunivoca che invece esiste tra un quadrato e un suo lato, o più in generale tra $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}$, sicché ci si può limitare a studiare gli insiemi lineari, insiemi di punti sulla retta. Il risultato non è tuttavia importante come il precedente, è significativo nella formazione del concetto di dimensione.

[53]L'uso del concetto di corrispondenza biunivoca per definire e determinare l'equinumerosità, o uguaglianza di cardinalità, è stato essenziale per chiarire i criteri di confronto tra le dimensioni degli insiemi. Si veda la confusione terminologica in Bolzano: egli afferma che "non tutti gli insiemi infiniti possono essere considerati uguali *per quel che riguarda la loro molteplicità*; al contrario, molti di essi sono *più grandi* (o *più piccoli*) di un altro", ma "nel senso di includere quest'altro come parte di se stessi", intendendo cioè con molteplicità non il numero di elementi ma l'aggregato degli elementi. Così può affermare che è evidente che la semiretta $[b, +\infty)$ è "maggiore di $[a, +\infty)$ della porzione $[b, a)$ se $b < a$", benché esponga altrove un argomento che prova l'esistenza di una corrispondenza biunivoca tra di esse, [Bolzano 1851, 19, pp. 24-5].

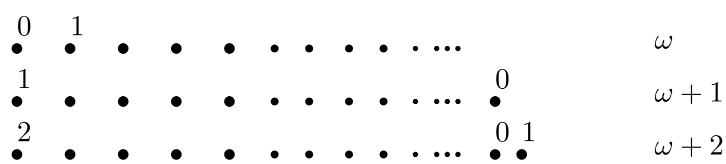
Si dice poi che un insieme Xha cardinalità minore di quella di Y se esiste una iniezione di X in Y ma non viceversa. Se esiste una iniezione di X in Y e una di Y in X, allora esiste una corrispondenza biunivoca tra X e Y (teorema di Cantor-Bernstein).

Cantor dimostra nel 1891, dopo più di dieci anni di intenso lavoro per predisporre gli strumenti necessari a sviluppare la teoria, che per ogni insieme X, anche infinito, l'insieme delle funzioni da X in $2 = \{0, 1\}$ ha cardinalità maggiore di X.

Si possono allora definire numeri maggiori di quelli finiti, che sono detti transfiniti.

Quarto sconvolgimento (o almeno una anomalia che solo la matematica dell'infinito poteva cogliere): nel concetto di numero si nascondono due essenze che appaiono separate nei numeri transfiniti, i numeri cardinali (*Zahlen*) e i numeri ordinali (*Anzahlen*).

Nel caso finito, il numero cardinale di un insieme X è l'ultimo numero che è coinvolto nella conta degli elementi di X uno a uno, ed è indipendente dall'ordine. Contare e valutare la cardinalità coincidono. Nel caso infinito, a seconda dell'ordine, si arriva a risultati diversi.



Cantor definisce subito come abbiamo visto che due insiemi hanno la stessa cardinalità quando tra di loro esiste una corrispondenza uno-uno;[54] vuole che la teoria degli insiemi includa l'aritmetica; ma entra nell'infinito mediante gli ordinali (*Anzahl*, numerazione). Inizialmente considera solo "simboli di infinito", come segnaposti per gli stadi di un processo che riprende e continua dopo i numeri naturali, con ∞, $\infty + 1$ ecc.; in seguito li trasforma in numeri ordinali (nel 1883). Il concetto di ordinale matematizza e generalizzza l'azione del contare, perché è un insieme ordinato in modo che tra gli elementi non utilizzati ce ne è sempre uno da scegliere in modo naturale, il minimo.[55] Il numero cardinale di un insieme è l'ordinale più "corto" con cui

[54]Non definisce il numero cardinale come classe di equivalenza di insiemi equinumerosi, come farà invece Russell, forse anticipando il sospetto che simile definizione non sia accettabile. In [Cantor 1895-97] dirà che il numero cardinale è il concetto generale che nasce da un qualunque insieme per astrazione dalla natura e dall'ordine degli elementi.

[55]Un tale ordine si chiama buon ordine. La prima definizione di Cantor è che (*i*) esiste un primo elemento, (*ii*) ogni elemento, se non è l'ultimo, ha un ben definito successore e (*iii*) per ogni insieme finito o infinito di elementi ne esiste uno che è il loro immediato successore (a meno che non ci sia nulla nella successione che li segue tutti. La definizione

si può numerare, contare l'insieme.

Il primo ordinale infinito è indicato da Cantor con ω (dalla fine del 1882 sostituisce ∞). Il primo cardinale infinito è indicato con $\aleph_0$, $\aleph$ prima lettera di alfabeti protosemitici e fenici, derivata dal geroglifico della testa di bue; $\aleph_0$ coincide con ω.

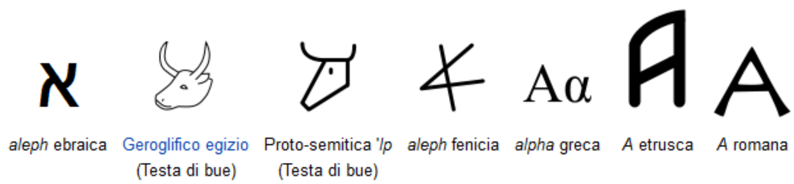


Figura 3: L'aleph.

Ordinali e cardinali hanno due aritmetiche diverse; quella degli ordinali è più deviante, la somma per esempio non è commutativa ($\omega = 1+\omega \neq \omega+1$). La somma e il prodotto di cardinali hanno definizioni analoghe al caso finito, pur se danno risultati un po' anomali.

La teoria contiene una serie di risultati paradossali, alcuni già noti per l'infinito numerabile, ma dimostrati in generale sono più sorprendenti, e utili, sono le tecniche di base per manipolare insiemi infiniti:

- un infinito si può spezzare in due infiniti ciascuno della stessa cardinalità del tutto (come per i pari e i dispari), quindi l'infinito ha una proprietà di autoriprodursi per mitosi;

- se si toglie a un infinito un infinito di cardinalità minore, il resto è uguale (come cardinalità) al tutto;

- la somma e il prodotto di due infiniti sono uguali al maggiore dei due, che generalizza l'annichilimento del numero; ma ciò nonostante la scala degli infiniti cresce;[56]

- ogni insieme infinito contiene una copia dei numeri naturali.

Non c'è bisogno di ricordare come l'infinito abbia permeato tutta la matematica contemporanea cambiandone il volto. Significativa è la circostanza

sarà semplificata come indicato nella nota 48.

[56]Indipendentemente dall'aritmetica cardinale. La totalità degli ordinali di una cardinalità fissata ha la prima cardinalità maggiore di quella data.

che si siano consolidate teorie dedicate allo studio delle strutture finite (gruppi finiti, geometrie finite, ...), caratterizzate proprio dall'aggettivo "finito", a parte la combinatoria, o matematica discreta (che è un sinonimo). Per il resto, dalla geometria all'analisi, alla probabilità, è solo infinito, ovviamente attuale. Né occorre menzionare le conseguenze per le scienze, naturali e tecnologiche.

Ricordiamo invece che per mezzo del concetto dell'infinito attuale è persino possibile dare un modello matematico del Dio di Bruno, del totalmente infinito. Una facile costruzione parte da un insieme infinito denso, come i razionali $\mathbb{Q}$, e sostituisce ogni elemento con una copia dello stesso $\mathbb{Q}$ e di nuovo, per il nuovo insieme, iterando, e prendendo alla fine il limite inverso.

$$
\begin{array}{lcl}
D_0 & = & \mathbb{Q} \\
D_{n+1} & = & D_n^* \\
D & = & \bigcup_0^\infty D_n
\end{array}
$$

dove X^* è definito sostituendo in X ogni suo elemento con una copia di X.

Il *limite inverso* di un sistema $\{X_i, f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ è un insieme X con una successione di proiezioni $\pi_n : X_n \to X$ tali che per ogni $n \in \omega$, $\pi_n = f_n \circ \pi_{n+1}$,

$$
\begin{tikzcd}
X_0 & X_1 \arrow[l, "f_0"'] & \cdots \arrow[l, dashed] & X_n \arrow[l, dashed] & X_{n+1} \arrow[l, "f_n"'] & \arrow[l, dashed] \\
 & & & X \arrow[ulll, dashed] \arrow[ull, dashed] \arrow[u, "\pi_n"] \arrow[ur, "\pi_{n+1}"'] & & \\
 & & & Y \arrow[u, dashed, "u"] \arrow[uur, bend right, "g_{n+1}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

universale nel senso che per ogni altro Y con proiezioni $\{g_i\}$ che soddisfano le stesse condizioni, esiste un unico $u : Y \to X$ per cui $\pi_i \circ u = g_i$.

Molto appropriato, in riferimento all'applicazione intesa, è il fatto che il limite inverso, se esiste in una categoria, è unico.

Ma forse è meglio se evochiamo, in Fig. 4, quello che forse è il simbolo della matematica di oggi, il frattale: il frattale è un oggetto dotato di autosimilarità, dove ogni parte ingrandita riproduce l'originale, è una copia in scala dell'originale. La costruzione sopra indicata per il totalmente infinito produce infatti una struttura tale che ogni intorno di un qualsiasi punto è simile all'intera struttura.

Figura 4: Un frattale.

Il frattale è in realtà un algoritmo generativo e quindi le figure che vengono mostrate si costruiscono solo con i suoi *run* più o meno lunghi; se lo si pensa al limite, se lo si facesse girare all'infinito, allora non si vedrebbe nulla, lo vede Dio. Per esempio, la curva di Peano, Fig. 5, al limite, riempie il quadrato, tutto nero. Potrebbe essere una bella metafora per rivendicare l'umanità della conoscenza potenzialmente infinita, contro l'accecante luce dell'infinito attuale.

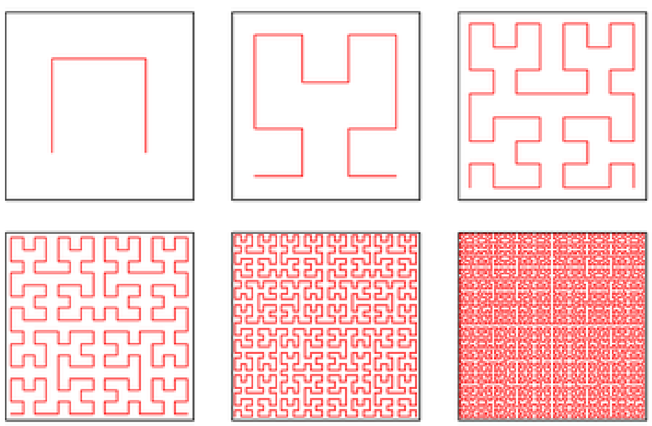


Figura 5: Curva di Peano

L'unico cruccio di chi aveva provocato questo sconvolgimento era, all'inizio, dovuto al fatto che tutto l'edificio deve poggiare su un assioma che afferma: esiste un insieme infinito. Come per il v postulato di Euclide, si è provato a sostituirlo con altri che lo implichino, e che siano meno brutali, meno da ladri (secondo la battuta di Russell su coloro che postulano un'affermazione non sapendo dimostrarla); un tentativo lo vedremo più avanti; ma prima si è cercato di dimostrarlo.

Russell ancora nel 1904 sosteneva di poter dimostrare l'esistenza dell'infinito matematico.[57] Bolzano aveva provato a dimostrarlo considerando l'insieme delle proposizioni che sono verità in sé, e in questo insieme definendo una successione: $A_0 =$ una qualunque verità in sé; $A_1 =$ "A_0 è vera"; $A_2 =$ "A_1 è vera", ... Ma era evidente che la successione presupponeva i numeri naturali. Dedekind ispirandosi a Bolzano aveva presentato un argomento che invece era corretto, nel senso che definiva una funzione iniettiva e non suriettiva nell'insieme dei pensieri.[58] Dato un pensiero a, la funzione aveva come valore $f(a)$ il "pensiero di a". La funzione è iniettiva, e non suriettiva perché esistono pensieri il cui oggetto non è un pensiero. Il neo ineliminabile è che il dominio dei pensieri non si può considerare un insieme dal punto di vista matematico.

Cosa è un insieme? Fino al momento in cui la teoria fu assiomatizzata da Zermelo (1871-1953) nel 1908, la definizione di insieme doveva essere affidata a immagini, sinonimi, circonlocuzioni, metafore.

Cantor ne propone diverse. In una definisce "insieme ben definito" come oggetto matematico: "Chiamo *ben definito* un aggregato (collezione, insieme) di elementi che appartengono a un qualsiasi dominio di concetti, se esso può essere considerato *internamente determinato* sulla base della sua definizione e in conseguenza del principio logico del terzo escluso. Deve essere anche internamente determinato se un oggetto che appartiene allo stesso dominio di concetti appartiene all'aggregato come elemento o no, e se due oggetti che vi appartengano, nonostante differenze formali, siano uguali o no".[59]

[57] [Russell 1904]. Dopo aver spiegato che la dimostrazione è essenziale per il progetto logicista di dedurre tutta la matematica dalla pura logica, abbozzava una dimostrazione, rinviando al volume dei *Principia* che stava scrivendo, dove non comparirà: dopo aver promesso la dimostrazione del principio di induzione, provava che il numero dei numeri da 0 a n è $n+1$, quindi nessun n è il numero di tutti numeri finiti; ma il numero dei numeri finiti esiste per la definizione (sic) dei cardinali, e quindi questo numero deve essere infinito.

[58] [Dedekind 1888, § 5, p. 98]: "66. *Teorema.* Esistono sistemi infiniti".

[59] [Cantor 1879-84, terzo articolo, del 1882].

Quindi avvicina il concetto a quello di idea platonica: "Con varietà, o insieme io intendo in generale ogni Molti che possono essere pensati come Uno, cioè ogni molteplicità [*Inbegriff*] di elementi determinati che possono essere uniti in un tutto da una legge, e con questo io credo di definire qualcosa che è vicina all'ἔιδος o all'ἰδέα platonica".[60]

In seguito, quando ormai non sussistevano dubbi sulla utilità della teoria, nel 1895 l'ultima definizione di Cantor si fa più scarna e *no nonsense*: "insieme" è il mettere insieme (*Zusammenfassung*) in un tutto unico oggetti determinati e ben distinti.[61] A conferma che in matematica non si definisce ciò di cui si parla.

Ma quando è che si possono mettere insieme in un tutto determinati oggetti? Non quando gli oggetti sono tutti, o tutti quelli di una specie illimitata, non contenuta in un altro insieme. L'antinomia di Russell comporta che non si possano mettere insieme tutti gli insiemi (la classe universale, come la chiamava Russell, che ci mise un po' ad accettare questa conclusione, cercando altre vie d'uscita).[62] Non si possono mettere insieme tutti i numeri ordinali;[63] non si possono mettere assieme tutti i numeri cardinali;[64] Non si possono mettere insieme tutti la totalità degli insiemi equinumerosi a uno dato (come Russell definiva i cardinali).[65]

A noi sembra di essere in grado di capire cosa significa "tutti" o "il tutto", e tuttavia non possiamo trattarlo matematicamente.

Allora, con Cantor, l'infinito attuale si dice in due modi: transfinito e Assoluto.

L'Assoluto può essere solo riconosciuto, non conosciuto, neppure approssimativamente, è il "vero infinito" la cui grandezza non può né crescere né diminuire ma solo essere descritta come un massimo assoluto incomprensibile con l'intelletto umano. L'Assoluto non ha gradazioni, non si misura, è

[60][Cantor 1883].

[61][Cantor 1895-97]. Nella traduzione inglese *Zusammenfassung* è stato reso con "una collezione in un tutto", e collezione sembra l'n-esimo sinonimo, mentre *Zusammenfassung* è l'operazione di formare una collezione.

[62]Altrimenti si potrebbe definire $\{x \mid x \notin x\}$ e conseguente contraddizione.

[63]O si otterrebbe un ordinale a cui seguirebbe uno maggiore di tutti, antinomia di Burali-Forti.

[64]Altrimenti questo insieme avrebbe una cardinalità, e ne esisterebbe una maggiore, antinomia del massimo cardinale.

[65]Altrimenti la totalità dei singoletti $\{x\}$, equiestesi con $\{\emptyset\}$, sarebbe un insieme, e di conseguenza anche la totalità di tutti gli insiemi.

ineffabile col linguaggio matematico.[66]

Tra il finito e l'Assoluto esiste la gerarchia illimitata di infiniti attuali di concetti matematicamente determinati, i numeri transfiniti.

Al cardinale Johannes Franzelin (1816-1886) che vedeva il pericolo del panteismo alla Bruno, la *natura naturans* che coincide con la *natura naturata*, Cantor rispondeva sottolineando la differenza tra un infinito assoluto, *Infinitum aeternum increatum sive Absolutum*, e un transfinito attuale creato. Alla quale il cardinale concedeva che, considerando essenzialmente differenti i due concetti di Infinito Assoluto e di Infinito attuale nel mondo creato, o Transfinito, non vedeva pericoli per le verità religiose nella concezione di Cantor.[67] E Cantor aggiungeva che era Dio che garantiva l'esistenza del *Transfinitum ordinatum*.

Cantor suggerisce anche che la successione totale dei numeri transfiniti possa essere un simbolo adeguato dell'Assoluto, anticipando la consapevolezza che tale successione non è un insieme: "In effetti, una molteplicità [*Vielheit*] può essere costituita in modo tale che l'ipotesi di una ≪esistenza simultanea≫ [*Zusammensein*] di *tutti* i suoi elementi porti a una contraddizione, di modo che è impossibile concepire tale molteplicità come una unità, come un ≪oggetto completo≫. Una tale molteplicità la chiamo *assolutamente infinita* o *inconsistente*. [...] Se al contrario, la totalità [*Gesamtheit*] degli elementi di una molteplicità può essere pensata come ≪esistente simultaneamente≫, di modo che sia possibile concepirla come ≪*un solo oggetto*≫, io la chiamo *molteplicità consistente*, o ≪insieme [*Menge*]≫. (In francese e in italiano tale concetto si esprime in modo preciso con le parole ≪ensemble≫ e ≪insieme≫)".[68]

È stato compito dei logici, e continua a esserlo, quello di tradurre simili indicazioni in regole precise. I logici raccogliendo l'indicazione di Poe pensano a come si pensa l'infinito.

L'Assoluto non è scomparso con Cantor e i teologi neo-tomisti. I ma-

---

[66] [Cantor 1886, p. 372, 376].

[67] [Dauben 1979, pp. 145-6]. Un altro teologo cattolico, Constantin Gutberlet (1837-1928), dell'*entourage* del papa Leone XIII, che con l'enciclica *Aeternis Patris* auspicava una rinascita della filosofia scolastica, usava la teoria di Cantor nelle sue polemiche a favore dell'esistenza dell'infinito attuale.

[68] [Cavaillès 1962, Lettera a Dedekind del 28 luglio 1899, p. 239]. Cantor non si spaventa della esistenza di molteplicità inconsistenti, anzi la usa ivi per dimostrare che ogni cardinale è un aleph, con una dimostrazione in realtà inaccettabile, discussa da Zermelo in [Cantor 1932, Appendice A].

tematici indicano con V l'universo degli insiemi, una totalità inconsistente. Ma è quasi impossibile non parlare dell'universo, sia pure senza assoggettarlo a operazioni matematiche. E il parlarne è utile, per esempio permette di trovare un'alternativa all'assioma dell'infinito; si chiama principio di riflessione, e dipende da una concezione di come (forse) funziona il nostro pensiero. Sull'universo alcune affermazioni si possono fare, e riconoscerle vere, anche senza usare una semantica esplicita, che per i quantificatori ("per ogni x ...", "esiste un x tale che ...") dovrebbe essere definita su una totalità inconsistente; ma per le singole affermazioni sull'universo è possibile postulare che ne comprendiamo il senso immaginando un quadro ridotto, una miniaturizzazione, con gli elementi tutti sotto controllo. Così si può pensare che ogni affermazione intesa a valere nell'universo implichi l'esistenza di totalità consistenti ove essa è ugualmente vera. Per esempio $\forall x \exists y (x \in y)$ è vero in V: come y si prenda $\{x\}$; sono sufficienti due livelli, quello di x e quello di $\{x\}$, per convincersi che l'affermazione è sensata.[69] Allora per riflessione

$$\exists a \forall x \in a \exists y \in a (x \in y)$$

e a risulta infinito.

Ormai è diffusa l'accettazione della presenza dell'infinito non solo nella scienza ma, come questa invade la vita quotidiana, anche nei discorsi comuni. Nessuno è turbato dal sentire che lo spettro elettromagnetico è infinito, infinite sono le frequenza, e ci sono infiniti colori, infinite onde acustiche, infinite armoniche per ogni nota. Tanto la matematica garantisce che l'infinito è sotto controllo. Ma non fidatevi dei matematici: "Gira, volta, e' son Francesi" ([Alfieri 1814]).

Cantor ha vinto perché David Hilbert (1862-1943) ha raccolto la sua bandiera giocando la propria reputazione sull'affermazione che "dal paradiso che Cantor ha creato per noi nessuno deve poter mai scacciarci"; ma pur affermando che "l'analisi matematica non è che una sinfonia dell'infinito", per Hilbert "l'infinito non si trova mai realizzato; esso non è presente in natura [la divisibilità infinita dell'intuizione ingenua è messa in crisi dalle teorie fisiche contemporanee], e neanche è ammissibile come fondamento del nostro pensiero razionale".[70]

Hilbert voleva legittimare la matematica dell'infinito senza accettarne l'esistenza, dimostrare che era solo un ente ideale, fittizio, con una funzione

[69] A prescindere dal fatto che in questo caso essa nella sua semplicità è dimostrabile logicamente dall'assioma della coppia, senza considerazioni semantiche.

[70] [Hilbert 1925, pp. 265-6].

economica e unificante analoga a quella già sperimentata con i punti all'infinito,[71] di un comodo modo di esprimersi e di semplificare le dimostrazioni per una matematica che restava un apparato per dimostrare formule numeriche. Non c'è riuscito, ma molti matematici condividono la sua credenza che "la matematica è una scienza senza ipotesi".

È quasi impossibile non finire di essere ambigui considerando tutte le sfaccettature dell'infinito. Perfino Leopardi dall'infinito silenzio è portato a pensare alle epoche e generazioni passate e alla presente, al suo rumore:

> [...] quello
> Infinito silenzio a questa voce
> Vo comparando: e mi sovvien l'eterno,
> E le morte stagioni, e la presente
> E viva, e il suon di lei.

Come se la tranquillità dell'infinito fosse il principio dell'agitazione, del fermento.

La profondissima quiete è continuamente disturbata, non solo sulla Terra: stelle che nascono e muoiono, esplodono, buchi neri che ingoiano tutto, o che si fondono, sia pure nel silenzio; un conoscitore dell'astronomia come Leopardi non poteva ignorare almeno una parte di questo perenne sconvolgimento, come non lo ignorava Poe che concepiva un'espansione e una contrazione cicliche dell'universo elaborando la teoria della nebulosa di Kant e Laplace. Per quel che riguarda la Terra tuttavia un aggettivo come "viva" non può suonare negativo, ricorda i fanciulli che "gridando sulla piazzuola in frotta e qua e la saltando fanno un lieto romore". Forse la lettura corrente della poesia deve essere ripensata. Forse l'immensità in cui Leopardi dolcemente naufraga non è quella dei sovrumani silenzi, ma è il suono della vita.

[71] Ripete quasi alla lettera le considerazioni di Gottfried W. Leibniz (1646-1716) su infiniti e infinitesimi che non hanno una realtà metafisica, ma sono un modo di esprimersi come quello dell'ottica, dove i raggi del sole sono considerati paralleli in quanto vengono da molto lontano (si dice "dall'infinito"); volendo se ne può fare a meno prendendo "invece dell'infinito o dell'infinitamente piccolo delle quantità sufficientemente grandi e sufficientemente piccole affinché l'errore sia minore dell'errore dato", come facevano gli antichi; sono "nozioni ideali che abbreviano il ragionamento", in "Mémoire de M. G. G. Leibniz touchant son sentiment sur le calcul differéntiel", 1701, [Leibniz 1849-1863, vol. 5, p. 350].

Riferimenti bibliografici

[Alfieri 1814] V. Alfieri, *Il Misogallo* (1814), dell'Orso, Alessandria, 2017.

[Anassimandro 1958] Anassimandro, *Frammenti*, in *I presocratici*, a cura di Alberto Pasquinelli, Einaudi, Torino, 1958, p. 44 ("Testimonianze" pp. 25-43).

[Anselmo 1077/8] Anselmo d'Aosta, *Proslogion*, a cura di Lorenzo Pozzi, Milano, BUR, 2012.

[Aristide 155] P. E. Aristide, "Encomio di Roma" (155), in *Éloges grecs de Rome*, a cura di L. Pernot, Les Belles Lettres, Paris, 1997.

[Aristotele 1955] Aristotele, *Organon*, Einaudi, Torino, 1955.

[Aristotele 1959] Aristotele, *La Metafisica*, Laterza, Bari, 1959.

[Aristotele 1973] Aristotele, *Opere*, vol. 3, *Fisica, Del Cielo*, Laterza, Bari, 1973.

[Berkeley 1734] G. Berkeley, *L'analista* (1734), Baccini e Chiappi, Firenze, 1971.

[Bettazzi 1896] R. Bettazzi, "Gruppi finiti ed infiniti di enti", *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*, 31 (1896), pp. 506-12.

[Bolzano 1851] B. Bolzano, *Paradoxien des Unendlichen*, Reclam, Leipzig, 1851; trad. it. *Paradossi dell'infinito*, Feltrinelli, Milano, 1965, e Bollati Boringhieri, Torino, 2003.

[Borges 1932a] J. L. Borges, "Metempsicosi della tartaruga", in [Borges 1932b, pp. 393-9].

[Borges 1932b] J. L. Borges, *Discussione* (1932), in [Borges 1984-5, vol. I, pp. 385-437].

[Borges 1952a] J. L. Borges, "La sfera di Pascal", in [Borges 1952b, pp. 911-4].

[Borges 1952b] J. L. Borges, *Altre inquisizioni* (1952), in [Borges 1984-5, vol. I, pp. 905-1093].

[Borges 1984-5] J. L. Borges, *Tutte le opere*, i Meridiani, 2 voll. Mondadori, Milano, 1984-5.

[Bruno 1584a] G. Bruno, *De la causa, principio et uno*, stampato in Venezia e Londra, 1584, disponibile in www.liberliber.it, Progetto Manuzio.

[Bruno 1584b] G. Bruno, *De l'infinito, universo et mondi*, stampato in Venezia e Londra 1584, disponibile in www.liberliber.it, Progetto Manuzio.

[Bruno 2009] G. Bruno, *Opere mnemotecniche*, tomo II, edizione diretta da M. Ciliberto, a cura di M. Matteoli, R. Sturlese, N. Trinnanzi, Milano, Adelphi, 2009.

[Cajori 1928-29] F. Cajori, *A History of Mathematical Notations*, The Open Court, La Salle Ill., 2 voll. 1928-1929, volume unico Dover, New York, 1993.

[Calvino 2002] I. Calvino, *Lezioni americane. Sei proposte per il prossimo millennio* (1985, prima ed. Garzanti 1988), Oscar Mondadori, Milano, 2002.

[Cantor 1874] G. Cantor, "Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen", *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (*Crelle*), 77 (1874), pp. 258-62.

[Cantor 1878] G. Cantor, "Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre", *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (*Crelle*), 84 (1878), pp. 242-58.

[Cantor 1879-84] G. Cantor, "Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten", *Mathematische Annalen*, 15 (1879), pp. 1-7; 17 (1880), pp. 355-58; 20 (1882), pp. 113-21; 21 (1883), pp. 51-8 e 545-91; 23 (1884), 453-88.

[Cantor 1883] G. Cantor, *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, Teubner, Leipzig, 1883, pubblicazione separata della parte 5 di [Cantor 1879-84].

[Cantor 1886] G. Cantor, "Über die verschiedene Standpunkte auf das aktuelle Unendliche", *Zeitschrift für Philosophie und philosophischen Kritik*, 88, 1886, pp. 224-33.

[Cantor 1892] G. Cantor, “Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre”, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 1 (1892), pp. 75-8.

[Cantor 1895-97] G. Cantor, “Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre”, *Mathematische Annalen*, 46 (1895), pp. 481-512 e 49 (1897), pp. 207-46.

[Cantor 1932] G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, a cura di Ernst Zermelo, Springer, Berlin, 1932.

[Cantor e Dedekind 1937] G. Cantor e R. Dedekind, *Cantor-Dedekind Briefwechsel*, a cura di E. Noether e J. Cavaillès, Hermann, Paris, 1937; trad. franc. in [Cavaillès 1962, pp. 187-249]; trad. it. a cura di P. Nastasi, in “Pristem/Storia - Note di Matematica, Storia, Cultura”, vol. 6, Springer Italia, Milano, 2002, pp. 134.

[Cavaillès 1962] J. Cavaillès, *Philosophie mathématique*, Hermann, Paris, 1962.

[Dauben 1979] J. W. Dauben, *Georg Cantor. His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, Harvard Univ. Press, Cambridge MA, 1979.

[Dedekind 1872] R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Vieweg, Braunschweig, 1872; trad. it. con il titolo *La continuità e i numeri irrazionali* in [Dedekind 1926, pp. 119-52] e con il titolo *Continuità e numeri irrazionali* in [Dedekind 1983, pp. 63-78].

[Dedekind 1888] R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen*, Braunschweig, Leipzig, 1888; trad. it. di O. Zariski, col titolo *Essenza e significato dei numeri*, in [Dedekind 1926, pp. 7-118], e di F. Gana col titolo *Che cosa sono e a che servono i numeri?* in [Dedekind 1983, pp. 79-128].

[Dedekind 1926] R. Dedekind, *Essenza e significato dei numeri. Continuità e numeri irrazionali*, a cura di O. Zariski, Casa Editrice Alberto Stock, Roma, 1926.

[Dedekind 1983] R. Dedekind, *Scritti sui fondamenti della matematica*, a cura di F. Gana, Bibliopolis, Napoli, 1983.

[Euclide 2014] Euclide, *Elementi* (ca. 300 a. C.), in *Tutte le opere*, a cura di Fabio Acerbi, Bompiani, Milano, 2014, pp. 777-1857.

[Galileo 1632] G. Galilei, *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo* (1632), 2. voll., BUR, Milano, 1959.

[Galileo 1638] G. Galilei, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attinenti la meccanica e i moti locali* (1638), Boringhieri, Torino, 1958.

[Gauss 1860] C. F. Gauss, *Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und H. C. Schumacher*, a cura di C. A. F. Peters, vol. II, G. Esch, Altona, 1860.

[Gauss 1863-1929] C. F. Gauss, *Werke*, Dieterich, Göttingen, 12 voll., 1863-1929.

[Goethe 2006] J. W. Goethe *Maximen und Reflexionen*, a cura di Helmut Koopmann, Deutscher Taschenbuch Verlag und C.H.Beck, München, 2006.

[Hilbert 1925] D. Hilbert, "Über das Unendliche" (1925), *Mathematische Annalen*, 95 (1926), pp. 161-90; trad. it. "Sull'infinito", in [Hilbert 1978, pp. 233-66].

[Hilbert 1978] D. Hilbert, *Ricerche sui fondamenti della matematica*, a cura di M. V. Abrusci, Bibliopolis, Napoli, 1978.

[Leibniz 1849-1863] G. W. Leibniz, *Leibnizens Mathematische Schriften*, C. I. Gerhardt hrg., 7 voll., Schmidt, Halle, 1849-1863; ristampa Georg Olms, Hildesheim, 1961.

[Leopardi 1818-9] G. Leopardi, *Canti* (1817-1836), a cura di Niccolò Gallo e Cesare Garboli, Einaudi, Torino, 1962, 1993.

[Lolli 2008] G. Lolli, *Guida alla teoria degli insiemi*, Springer Italia, Milano, 2008.

[Newton 1722] I. Newton, "An Account of the Book entituled Commercium Epistolicum Collinii et aliorum, De Analysi promota", 1722. Facsimile in Appendix in A. Rupert Hall, *Philosophers at War. The quarrel between Newton and Leibniz*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1980; trad.

it. *La disputa Leibniz-Newton sull'analisi*, Boringhieri, Torino, 1958, pp. 17-81.

[Pascal 1670] B. Pascal, *Pensées* (1670 postumo), in *Œuvres complètes*, Bibliothèque de la Pléiade, Gallimard, 1954, pp. 1079-517.

[Poe 1848] E. A. Poe, *Eureka : An Essay on the Material and Spiritual Universe* (1848), in [Poe 1976, pp. 205-309].

[Poe 1976] E. A. Poe, *The Science Fiction of Edgar Allan Poe*, con una introduzione di Harold Beaver, Penguin Books, Middlesex, England, 1976.

[Russell 1903] B. Russell, *The principles of mathematics*, Allen and Unwin, London, 1903; trad it. *I principi della matematica*, Longanesi, Milano, 1951.

[Russell 1904] B. Russell, "The Axiom of Infinity", *Hibbert Journal*, 2 (1904), pp. 809-12, ristampato in [Russell 1973, pp. 256-9].

[Russell 1973] B. Russell, *Essays in Analysis*, a cura di D. Lackey, George Allen&Unwin, London, 1973.

[Stifel 1544] M. Stifel, *Arithmetica Integra*, Iohan Petreium, Norinberga, 1544.